

无聊且讶异：基于模型论与程序性语义信息对演绎丑闻的化解

Both Boring and Surprising: A Dissolution of the Scandal of Deduction
Based on the Model Theoretic and the Procedural Semantic Information

卢峰峰 /LU Fengfeng

(清华大学科学史系, 北京, 100084)
(Department of the History of Science, Tsinghua University, Beijing, 100084)

摘要: 演绎丑闻是指演绎推理在逻辑论证上不能带来信息量增长, 但在认知实践上具有信息感差异的直觉冲突。相关替代项、推理深度和构造程度方案拓展了演绎推理除能排除世界可能性的模型论语义信息外, 还可排除认知可能性的程序性语义信息维度。透明内涵构造法和数据库更新法为统一测度演绎的程序性语义信息量提供了两条路径。通过建立演绎推理的世界可能性模型和认知可能性模型, 演绎的分析性可被视为世界模型中真值资源在数量上的恒定, 演绎的综合性可被视为认知模型中认知资源在结构上的更新。演绎是一种既有恒定的模型论语义信息又有可变的程序性语义信息的推理方式。

关键词: 演绎丑闻 信息量 模型论语义 程序性语义 认知可能性

Abstract: The scandal of deduction is an intuitive conflict in which the deductive inference does not lead to an increase of information amount, but the deduction practice does make differences of information sense. Relevant alternatives, inference depth, and construction degree approaches expand the procedural semantic information dimension of deductive inference in addition to the model-theoretic semantic information of world possibilities. Transparent intensional constructions and database updating methods provide two approaches for uniformly measuring the procedural semantic information of deduction. By establishing the world-possibility model and the cognition-possibility model of deductive inference, the analysis of deduction can be viewed as the constancy of types of truth resources in the world-possibility model, while the synthesis of deduction can be viewed as the updating of the structure of cognitive resources in the cognition-possibility model. Deduction is finally an inference that has both constant model-theoretic semantic information and variable procedural semantic information.

Key Words: Scandal of deduction; Information amount; Model-theoretic semantics; Procedural semantics; Cognitive possibility

中图分类号: H03; B842.1 DOI: 10.15994/j.1000-0763.2026.10.006 CSTR: 32281.14.jdn.2026.10.006

演绎推理是前提为真, 则结论为真的一种推理方式。有效演绎的逻辑形式可表达为“ $\Gamma \vdash \Phi$ ”, 其中“ Γ ”为前提集, “ Φ ”为结论集, “ $\vdash$ ”为前提为真则结论为真的可推导关系。演绎丑闻 (the scandal of deduction) 则是指演绎推理的平凡性直觉 (trivial intuition) 和显著

性直觉 (significant intuition) 之间的冲突。一方面, 人们觉得演绎推理的结论包含在前提之中, 演绎前后的真命题集“ Γ ”与“ $\Gamma \cup \Phi$ ”是无信息差异的 (令人无聊的); 另一方面, 我们也有强烈的反直觉, 知道前提并不等于知道全部结论, 表达式“ Γ ”与“ $\Gamma \rightarrow \Phi$ ”之间是有信

收稿日期: 2025年8月26日

作者简介: 卢峰峰 (1997-) 男, 山西大同人, 清华大学科学史系博士研究生, 研究方向为一般科学哲学、认知科学哲学, 信息哲学。Email: lff24@mails.tsinghua.edu.cn

息差异的（令人讶异的）。逻辑实证主义者的分析性和香农（C. E. Shannon）的信息量观点支持了演绎推理的平凡性直觉——在逻辑论证上，演绎推理没有为旧知识增加新颖的真命题。逻辑实证主义者指出恒真命题的有效性就在于同义反复（tautological）。分析性命题如“单身汉是未结婚的男人”由于意义而必然为真，因而不携带有关世界状态的事实信息。^[1]信息理论家香农坚持命题信息量与概率之间的反比关系。例如硬币某面出现的概率越高，其被告知出现时的信息量（排除的可能性、产生的惊讶度）就越低。^[2]任何有效的演绎拓展，以前提为条件的为真概率均为百分之百，即新增的事实信息量为零。维特根斯坦的真值表法和弗雷格（G. Frege）的认知劳动观点则支持了演绎推理的显著性直觉——在认知实践上，演绎推理带来了旧知识的新理解。维特根斯坦意识到命题逻辑的恒真式和矛盾式的真假可以被真值表演算，演绎推理可以带来符号系统如何运作的信息。例如“ $\neg p \vee \neg p$ ”就表明这是一个排中律有效的逻辑系统。但他认为这种信息作为事实信息的退化微不足道，也没有深入探讨其实现机制。^[3]弗雷格则指出量词化语言中的演绎推理涉及对前提中谓词的模式识别。例如“比尔杀死汤姆”中的谓词“杀死”就有“杀死……”和“被……杀死”两种理解方式。这会导致如“比尔杀死某人”和“某人杀死汤姆”这样不同的结论。演绎并非简单地找出整体对部分的包含，而是要求我们付出一定的认知劳动。^[4]

演绎的平凡性直觉和显著性直觉断言了两个互不相容的命题：“演绎是无信息的”且“演绎是有信息的”，即“ $[I(\Gamma \vdash \Phi) = I(\Gamma)] \wedge [I(\Gamma \vdash \Phi) > I(\Gamma)] \equiv \perp$ ”（谓词 I 指表达式的信息量， $\perp$ 为矛盾式标志）。然而两种直觉又是我们都不愿舍弃的，因为平凡性直觉符合演绎分析性有效（analytic validity）的要求，显著性直觉则回应了演绎综合性有用（synthetic usefulness）的期待。其中分析性有效是指，若 $\Gamma \vdash \Phi$ ，则所有满足 Γ 的真值条件必然满足 $\Gamma \cup \Phi$ 。即演绎的保真能力需要从前提到结论某些真值条件的已然包含。这种分析性的

代价就是演绎推理的信息匮乏。综合性有用则是指，若 $\Gamma \vdash \Phi$ ，则所有能构造出 Γ 的认知条件不一定构造出 $\Gamma \rightarrow \Phi$ 。即演绎的认知更新要求从前提到结论某些认知条件的尚待添加。这种综合性的后果就是演绎推理的信息增长。本文的主要工作就在于揭示演绎推理的平凡性直觉依赖真值条件传递的模型论语义信息（model-theoretic semantic information），显著性直觉依赖认知分支更新的程序性语义信息（procedural semantic information），即上述矛盾式中的谓词“ I ”实际上是两个逻辑独立的谓词：“ I_{model} ”和“ $I_{\text{procedure}}$ ”。平凡性直觉和显著性直觉的断言并不构成有关演绎的逻辑悖论（丑闻），因此我们可以合理地同时拥有这两种直觉。文章第一部分比较对演绎丑闻的不同理解，指出其解决之道就在于利用“信息”概念澄清两种冲突直觉的形成机制。第二部分评析演绎丑闻的显著性直觉解释方案，包括相关替代项、推理深度和构成程度理论，它们分别处理了自然语言、命题逻辑和谓词逻辑中演绎推理的程序性语义信息。第三部分探讨统一测度程序性语义信息的两种方法：透明内涵构造法和数据库增删操作法，两者分别实现了对程序性语义信息的可排序和可加性测度。第四部分建立演绎推理的世界可能性和认知可能性模型，同时保全演绎推理的论证有效性和认知有用性。

一、演绎丑闻：记忆、心理与信息

演绎推理的两种冲突性直觉很早就被意识到，但不同的表述阻碍了其被澄清。第一种理解是柏拉图的美诺悖论（Meno's paradox），即知识通过辩证法获取的两难问题，心灵已知的东西不必知道，未知的东西无法知道：“一个人既不能试着去发现他知道的东西，也不能试着去发现他不知道的东西。”柏拉图的解决之道是，灵魂记忆了所有知识，获取新知识只是回忆起灵魂已经学会但遗忘的东西。^[5]但由于逻辑系统的定理可以被无限构造，人类无法储存任意前提的所有逻辑后承以满足平凡性直觉，显著性直觉自然也不可能来自柏拉图意义

上的回忆。第二种理解是科恩(M. R. Cohen)和内格尔(E. Nagel)的推理悖论(inference paradox):“如果一个推理的结论不包含在前提中,它就不可能是有效的;如果结论与前提没有区别,它就是无用的;但结论不可能既包含在前提中,也具有新颖性;因此,推论不可能既有效又有用。”他们试图通过演绎的逻辑有效性和心理新颖性互不影响来化解这一悖论。平凡性直觉反映了逻辑系统的分析性本质,显著性直觉是因为表达式的约定意义和蕴涵意义不总在人的心灵中共现。^[6]然而,不同人由于差异化的超逻辑兴趣和智力技巧,识别出的命题的约定意义和蕴涵意义可能并不相同。这使得心理新颖性缺乏统一有效的衡量机制。第三种理解是欣蒂卡(J. Hintikka)的演绎丑闻:“除了归纳的丑闻之外,还有一个同样令人忧虑的演绎的丑闻……人们被告知演绎推理是‘重言式的’或‘分析式的’,并且逻辑真理没有‘经验内容’,不能用来做出‘事实断言’。然而在其他意义上,演绎推理是否给我们提供了新的信息?”欣蒂卡认为演绎推理不能给我们带来新的事实信息(real information),但可以带来表达式的意义如何通过排除平凡不一致成分而收束到事实信息的信息概念(conceptual information)。([7], p.222)欣蒂卡引入逻辑与认知中发展比较充分的“信息”概念,使得演绎推理的两种冲突性直觉有了进一步澄清的可能,也即平凡性直觉和显著性直觉可以具有兼容的机制性解释。

在本文中,我们将坚持从香农的信息熵中推导出的信息的个体解释(individual account of information): $I(s_i) = -\log P(s_i)$, 其中 I 为信息量, P 为概率, s_i 为系统的 i 状态。^[8] 即信息感的获得依赖于系统进入确定状态时对其他可能状态的排除;信息量的测度依赖于系统所有状态所构成的可能状态空间的复杂度。欣蒂卡对演绎丑闻的定义既涉及静态的恒真命题,又涉及动态的演绎推理,达戈斯蒂诺(M. D'Agostino)因此建议将演绎丑闻分为两个部分:恒真命题是否包含事实信息,如命题逻辑中的“ $p \vee \neg p$ ”;以及演绎推理是否提供新的信

息,如“所有人是有死的 $\rightarrow$ 苏格拉底是有死的”。^[9] 不过,恒真命题可以视为自身向真值1的推理,如“ $p \vee \neg p \vdash 1$ ”;有效演绎推理也可以整体上视为一个恒真式,如“所有人是有死的 $\vdash$ 苏格拉底是有死的”。鉴于前面我们把有效演绎的逻辑形式统一为:“ $\Gamma \vdash \Phi$ ”,演绎丑闻的论证目标可统一表述为:说明演绎推理前后的表达式“ Γ ”和“ $\Gamma \vdash \Phi$ ”是否有信息差异。

演绎推理的平凡性直觉可以表述为:演绎前后的真命题集“ Γ ”与“ $\Gamma \cup \Phi$ ”相比是无信息差异的。借助卡尔纳普(R. Carnap)和巴-希尔(Y. Bar-Hillel)的模型论语义信息概念,它可以被进一步表述为“ $\Gamma \cup \Phi$ ”中的命题所排除的世界可能状态不会超过“ Γ ”中的命题所排除的世界可能状态。就像从大罐中取出嵌套的小罐,新取罐子的尺寸在均不超过初始罐子的意义上不会令我们惊讶。所谓命题的模型论语义是指模型到命题真值的映射,模型论语义信息则可被定义为命题获得其模型论语义时所排除的世界可能状态。模型论语义信息的刻画依赖于关于世界的状态描述(state-descriptions),其中每一个状态描述都对系统中的所有个体进行了全部谓词位上的赋值。([10], p.5)例如在包含 a 、 b 、 c 三个个体词和 M 、 Y 两个谓词的语言系统中,一条完整的状态描述为:“ $Ma \wedge \neg Ya \wedge Mb \wedge Yb \wedge \neg Mc \wedge Yc$ ”(可以视为个体词具有/不具有某个属性的六个命题的合取)。根据个体词的排列组合和谓词的真假二值,共有64种状态描述。命题 i 的内容(content)被视为命题所排除的状态描述的集合,并由蕴涵 i 的状态描述占全部状态描述的频率 $p(i)$ 来度量: $\text{cont}(i) = 1 - p(i)$ 。命题 i 的语义信息量(information amount)与命题内容 $\text{cont}(i)$ 成正比、与命题概率 $p(i)$ 成反比: $\text{inf}(i) = \log(1/(1 - (\text{cont}(i))) = -\log p(i)$ 。([10], pp.9-18)例如,“ $Ma \wedge Mb$ ”为真的概率为 $1/4$,排除了上述系统中 $3/4$ 的可能状态,其模型论语义信息量为“ $-\log 1/4$ ”。演绎推理“ $Ma \wedge Mb \rightarrow Ma$ ”后所获得全部真命题为(“ $Ma \wedge Mb$ ”“ Ma ”)。其中“ $Ma \wedge Mb$ ”与前提等同,排除了 $3/4$ 的可能状态。“ Ma ”为真排除 $1/2$ 可能状态。但根据蕴涵符的意义,“ Ma ”

所排除的可能状态集合是前提所排除的可能状态集合的一个子集。因此（“ $Ma \wedge Mb$ ” “ Ma ”）总体排除了 $3/4$ 的可能状态，其模型论语义信息量也为 $-\log 1/4$ 。这也反映在相对语义信息量 $\inf(Ma|Ma \wedge Mb)$ 为零，即演绎推理的结论集相比前提集不会提供更多的模型论语义信息。

演绎推理的显著性直觉可以表述为：演绎前后的表达式“ Γ ”与“ $\Gamma \rightarrow \Phi$ ”是有信息差异的。根据信息与可能状态排除之间的关联，它可以被进一步表述为“ $\Gamma \rightarrow \Phi$ ”所排除的认知可能状态不会少于“ Γ ”所排除的认知可能状态。就像从大罐取出嵌套的小罐，越小的罐子总是需要更多的操作步数，这导致了更多的认知可能状态。问题的关键是我们如何像模型论语义信息那般客观衡量认知可能状态的排除。信息哲学家弗洛里迪（L. Floridi）提出一种强语义信息（strong semantic information）概念，要求语义信息包含真理条件——即信息是形式良好的、富有意义的且真实的数据。^[11]他指出卡尔纳普和巴-希尔对语义信息的处理造成了矛盾命题包含无穷信息这一反直觉的后果（矛盾排除了所有可能世界）。强语义信息的真理条件可以屏蔽掉这一推论，因为虚假的东西本质上就提供不了语义信息。他进一步建议通过命题与目标情境之间的距离来衡量命题的语义信息量——“信息离其目标越远，它所适用的情况就越多，其信息性程度就越低”。^[12]那么命题所排除的认知可能状态就取决于具体语境。例如，对于“我希望知道来聚会的人数以准备餐食，且今晚实际上会有三个人来聚会的情境”。恒真命题“今晚要么有、要么没有三个人来”对我们确定人数的目标距离太远，就不如真命题“今晚有四人左右参加聚会”或“今晚有三个人来”提供的语义信息多。与此类似，当老师要求学生举例恒真式时，恒真命题也是有信息量的；当逻辑学家使用反证法证明假设时，矛盾式也是有信息量的；当数学考试要求学生写下给定前提到结论时的论证时，推理过程也是有信息量的。弗洛里迪的语义信息本质上是一种实用型语义信息。它可以告诉我们同一个演绎推理在某些情境中有新信息，在某些

情景中没有新信息，并通过对设问回答的相关性和准确性来衡量其语义信息量的多少。但其面临和逻辑实证主义者的“心理新颖性”相同的批评——缺乏统一有效的衡量机制。

二、有信息直觉形成方案： 相关替代项、推理深度和构造程度

我们前面回顾了对演绎丑闻的三种理解——记忆与回忆，逻辑有效性与心理新颖性，事实信息和概念信息，并指出第三种理解有望继承信息的明确性和定量性的优点以澄清演绎推理的冲突性直觉。卡尔纳普和巴-希尔从表达式的指称入手，使用模型论语义成功刻画了演绎推理的平凡性直觉。弗洛里迪从表达式的效用入手，试图利用语用型语义信息澄清演绎推理的显著性直觉，但因为缺乏客观标准而失败。因此演绎丑闻的澄清所面临的进一步问题是平凡性直觉的解释方案与显著性直觉的解释方案之间的不对称。其解决之道就在于开发一种能和模型论语义信息相媲美的语义信息方案，以识别和度量演绎推理前后表达式的信息差异。

第一种解决方案认为演绎推理的显著性直觉是由命题中概念的信息结构的复杂度决定的，其中涉及对概念相关替代项的排除。德雷茨克（F. I. Dretske）指出，命题语义信息的获得以主体的“知道”为前提。而“知道”作为一种“认知算子”（epistemic operator）不具有对“逻辑蕴涵”符的全穿透性，这就为演绎前后的信息差异创造了条件。^[13]为什么在形式逻辑上都成立的蕴涵关系，在“知道”算子修饰之下，会有成有败呢？他认为“知道”算子能否穿透到演绎前提所蕴涵的结论，取决于结论中核心概念的相关替代项是否能被认知者成功把握。因为“知道X是A就是在B、C和D这些相关选项的框架内知道X是A。这组对比，加上X是A的事实，决定了当一个人知道X是A时他所知道的是什么。”^[13]而概念的相关替代项是人类在概念的自然习得过程中形成的稳定信息结构：“概念是在一组最佳条件下获得

的——至少从信息的角度看是最佳的。人们通过接触各种是F的事物和(通常)不是F的事物来学习F是什么(获得F概念)。”例如“苹果”是“多汁的”“甜味的”“非石质的”“非辛辣的”等等。^[14]借德雷茨克的理论,我们可以开发一种基于相关替代项排除的语义信息方案。例如,“我有一双手”在逻辑上蕴涵“我没有因车祸失去单手”和“我不是缸中之脑”。“失去单手”在日常的相关替代项{“畸形手”“正常手”“无手”}中能被多数人习得。因此“我知道我有一双手”一般可以自然推导出“我知道我没有因车祸失去单手”。这就给我们推理前后无信息的错觉,实际上我们只是对概念的信息结构过于熟练。“缸中之脑”在抽象的相关替代项{“知觉”“幻觉”“错觉”}中才能习得。所以“我知道我有一双手”一般不能自然推导出“我知道我不是缸中之脑”,除非我们熟悉了怀疑论语境,并在认知中构造出“缸中之脑”的意义。因此演绎推理的语义信息的获得需要我们不断排除命题中“新概念”的相关替代项。新概念的信息结构并不包含在与之有逻辑关联的旧概念之中。基于相关替代项排除的语义信息在自然语言的演绎推理分析中具有优势,即使是相似的概念例如“单身汉”和“未结婚的男人”往往也有不同的内在认知结构。该方案的缺点在于,一是人类的概念形成虽然相似但并不完全相同,知道算子穿透蕴涵符所需要掌握的信息结构很难完全确定。二是对于形式语言,如命题逻辑和谓词逻辑,表达式意义的相关替代项只有真假两种,相关替代项的辨别机制就不够灵敏。

第二种解决方案认为演绎推理的有信息直觉是由命题证明的推理深度(inference depth)决定的,其中涉及对原子命题的真值不确定性的排除。达戈斯蒂诺(M. D'Agostino)指出,虽然一阶逻辑系统具有完备性,即给定任意定理存在从前提开始的证明,但计算复杂度决定了我们没有机械程序可以在多项式时间内给出任意定理的证明过程。这是演绎具有信息性的前提。^[9]他根据原子命题应用双值规则赋值细化的层数来衡量命题逻辑表达式的证明

复杂度。其中“ $T(p)$ ”表示对 p 赋值为1,反之则为“ $F(p)$ ”,“ $\Rightarrow$ ”为只运用引入、消除与一致性规则的深度蕴涵。^[15]例如“ $(p \wedge q) \vdash q$ ”的深度推理过程为“ $T(p): p \wedge q \Rightarrow q$ ”。其推理深度为0,因为结论 q 只需运用合取消除规则即可得出,不需要探讨 p 和 q 为真为假的可能性。排中律“ $\vdash p \vee \neg p$ ”的深度推理过程为“ $T(p): p=1 \Rightarrow \neg p=0 \Rightarrow 1 \vee 0 \Rightarrow 1; F(p): p=0 \Rightarrow \neg p=1 \Rightarrow 0 \vee 1 \Rightarrow 1$ ”。其推理深度为1,因为我们假设了1个原子命题 p 为真为假的情况,再运用否定引入和析取引入规则即可得出结论。假言三段论“ $p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow s \vdash p \rightarrow s$ ”的深度推理过程为“ $T(p): p=1 \Rightarrow (T(q): q=1 \Rightarrow r=1 \Rightarrow s=1 \Rightarrow p \rightarrow s; F(q): q=0 \Rightarrow \perp \Rightarrow p \rightarrow s); F(p): p=0 \Rightarrow (T(q): q=1 \Rightarrow r=1 \Rightarrow s=1 \Rightarrow p \rightarrow s; F(q): q=0 \Rightarrow \perp \Rightarrow p \rightarrow s)$ ”。其推理深度为2,因为我们在 p 为真为假的情况下又分别假设了 q 为真为假的情况,然后运用蕴涵消除和蕴涵引入规则即可得出结论。可以看到深度推理中的证明等价于经典命题逻辑证明中的可满足性,因为有时只要对少量原子命题进行赋值细化就能匹配出结论;而当推理深度不受限制地达到所有原子命题数量时,就等同于经典命题逻辑的可证明性。达戈斯蒂诺认为深度推理中对原子命题的处理:“本质上涉及操纵虚拟信息的推理模式,对于每个现实的行动者来说,需要付出客观的努力,这种努力随着引入虚拟信息的深度而增加。”^[16]也就是说在每一种情况下我们都模拟了实际不拥有的信息,即原子命题为真或为假的确定情况,然后通过简单的推理规则来检查每种选择的结果是什么。

达戈斯蒂诺的推理深度理论可以根据赋值细化过程中对原子命题的真值不确定性的排除刻画命题逻辑表达式的语义信息。其缺点是无法运用到更加复杂的谓词逻辑上。由于重叠量词和关系谓词的出现,一阶二元以上的谓词逻辑表达式可能并不存在形式良好、步骤有限且方便比较的证明过程。

第三种解决方案认为演绎推理中的显著性直觉是由我们为了理解命题所需要同时设想的个体数量(构造程度)决定的,其中涉及对

其他构造方式的排除。欣蒂卡指出任何给定的一阶谓词逻辑表达式都具有确定数量的重叠量词（又称为谓词逻辑式子的深度）和自由个体符号，两者之和就是逻辑式子的构造程度（construction degree）。构造程度衡量我们在理解或验证表达式时，必须涉及多少个个体，才能构建出它的语义模型或发现其真值。^[17]例如常量“Mary”是不受量词约束的自由个体符号，其构造程度为1；“ $\exists y(\text{loves}(y, \text{Mary}))$ ”（存在 y ， y 喜欢Mary）有1层量词“ $\exists y$ ”和1个自由个体符号Mary，构造程度为2；“ $\forall z(\exists y(\text{loves}(z, y) \wedge \text{loves}(y, \text{Mary})))$ ”（每一个 z 都存在其所喜欢的人 y ，且 y 都喜欢Mary）有2层重叠量词和1个自由个体符号，构造程度为3。即为了理解“ $\forall z((\exists y(\text{loves}(z, y) \wedge \text{loves}(y, \text{Mary})))$ ”这个式子，认知者需要同时设想3个个体及其之间的关系。欣蒂卡认为根据量词层数（深度）可以逐层将表达式展开为等价的析取分布范式。每一深度的所有可能式子被称为原表达式的成分（constituents），即对全部个体及其关系的全面且一致的可能性描述。通过排除析取分布范式中可直接观察到矛盾的平凡不一致（trivial inconsistency）成分，我们可以逐渐逼近原表达式的真值即其所传达的事实信息。（[7], p.229）但通过穷举排除不一致成分来判断原表达式的有效性，只是把表达式整体的难证明问题拖延到了其成分的难证明问题。因此构造程度概念难以实际上衡量谓词逻辑表达式的证明复杂度，而更有利于衡量其理解复杂度。我们以“ $\forall z(\exists y(\text{loves}(z, y) \wedge \text{loves}(y, \text{Mary})))$ ”为例。令个体词 x, y, Mary 为自由构造成分。可能的构造状态包括：变量个体词 x, y 在量词位“ $\forall_ (\exists_)$ ”上的2种状态；3个个体词 x, y, Mary 在第一个谓词位“ $\text{love}(_, _)$ ”上的6种状态；以及3个个体词在第二个谓词位上“ $\text{love}(_, _)$ ”的6种状态。因此总的构造方式为“ $2 \times 6 \times 6 = 72$ ”种。最初式子的出现即排除了其余71种构造方式。

我们从欣蒂卡的构造程度概念发展而来的构造方式排除方案，可以在谓词逻辑表达式难以确定完整证明过程以识别其复杂度时，通过

可理解性的复杂度和构造方式的排除来刻画显著性直觉的形成机制。这是此方案的优势。

三、程序性语义信息量的统一测度

德雷茨克、达戈斯蒂诺和欣蒂卡三人在自然语言、命题逻辑和谓词逻辑中所做的工作是互补的，他们分别从命题的如何知道、如何证明、如何理解的复杂度，以及相关认知可能性的排除刻画了演绎推理的显著性直觉。其中复杂度描绘了认知系统的可能状态空间的大小，认知可能性的内容则由所关注的命题意义的不同方面来决定。这些方案广义上都属于程序语义学（procedural semantics），但不是证明论语义学（proof-semantics）。前者只要求用结构化操作生成表达式某方面的意义，后者还要求该结构化操作符合经典逻辑的证明程序。^{[18], [19]}为了与模型论语义信息相对比，我们定义命题的程序性语义为程序到命题的可知道性、可证明性、可理解性或其他意义方面的映射。程序性语义信息为命题获得程序性语义时所排除的认知可能状态。以上三种互补的程序性语义信息方案足以识别出诸多演绎推理前后的信息差异。进一步问题是，演绎推理的显著性直觉有可能使用同一套结构化操作，并且针对命题的同一个意义方面来统一测度吗？

杜兹（M. Duží）将演绎推理的程序性语义视为：完整呈现表达式透明内涵的结构化程序，程序性语义信息量则由程序的复杂度决定。结构化程序由非构造（non-constructions）和构造（construction）的二维嵌套形成。非构造是操作对象，可以提供函数的输入。例如真值类型 $\circ$ 、个体类型 ι 、谓词类型 ρ 、时间类型 τ ，世界类型 ω 等。构造则是操作行为，可以提供对象之间的映射规则。其包括变量操作“ x, y, z ”；平凡化操作（trivialization）“ 0X ”；组合（composition）操作“ $[X Y_1 Y_2 \dots Y_m]$ ”；闭包（closure）操作“ $[\lambda x_1, x_2 \dots x_n Y]$ ”四种。^[20]有了非构造和构造的定义，我们就可以区分很多模型论语义相同但程序性语义不同的演绎推理。例

如,设前提为 Γ :“所有女王都是女性统治者”。其透明内涵程序为: $\lambda\omega\lambda\tau\forall x[\rightarrow[{}^0\text{Queen}_{\omega\tau}x][{}^0\text{Female}_{\omega\tau}x\wedge{}^0\text{Ruler}_{\omega\tau}x]]$,在任一时空,所有具有女王属性的事物都具有女性属性和统治者属性。其中“ $\lambda\omega\lambda\tau[\dots]$ ”定义了世界变量 ω 、时间变量 τ 和复杂的闭包操作 $[\dots]$,意为通过时空变量赋值对括号内的操作添加具体时空标签。“ $\forall x[\dots]$ ”为闭包类型的全称量词操作,对论域中所有个体 x 进行括号内函数检查并返回真值。“ $[\rightarrow[\dots][\dots]]$ ”为组合类型的条件检查操作,检查输入在符合左括号内函数的条件下是否符合右括号内函数并返回真值。“ ${}^0\text{Queen}$, ${}^0\text{Female}$, ${}^0\text{Ruler}$ ”是谓词类型的平凡化,检查携带时空标签的个体是否属于谓词外延并返回真值。该前提蕴涵以下三个结论: Φ_1 :“没有事物是女王,同时也是男性”。 Φ_2 :“没有事物是女王,同时也是平民”; Φ_3 :“不存在是女性的统治者同时也是非女性的事物”。由于演绎推理后的不同表达式“ $\Gamma\rightarrow\Phi_n$ ”中“ Γ ”相同,其程序差异将由“ Φ_n ”决定。 Φ_1 的程序: $\lambda\omega\lambda\tau[{}^0\text{NO } {}^0\text{Queen}_{\omega\tau} {}^0\text{Male}_{\omega\tau}]$,在任一时空,女王事物集合“ $\text{Queen}_{\omega\tau}$ ”与男性事物集合“ $\text{Male}_{\omega\tau}$ ”通过无交集检测函数NO会输出真值1(即无交集)。 Φ_2 的程序: $\lambda\omega\lambda\tau[{}^0\text{NO } {}^0\text{Queen}_{\omega\tau} {}^0\text{Civilian}_{\omega\tau}]$,在任一时空“ $\lambda\omega\lambda\tau$ ”,女王事物集合“ $\text{Queen}_{\omega\tau}$ ”与平民事物集合“ $\text{Male}_{\omega\tau}$ ”通过无交集检测函数NO输出真值1。 Φ_3 的程序: $\forall\omega\forall\tau\rightarrow\exists x[[{}^0\text{Female}_{\omega\tau}x]\wedge[{}^0\text{Ruler}_{\omega\tau}x]\wedge\neg[{}^0\text{Female}_{\omega\tau}x]]$,在任一时空,不存在某物同时具有女性属性、统治者属性和非女性属性。可以看出 Φ_1 和 Φ_2 在信息复杂度上相同,因为它们使用了同构的函数形式NO,且内部子程序数量相等; Φ_3 语义信息更复杂,因为它对“女王”构造作了更精细的刻画,并且直观展现了命题成分之间的逻辑矛盾。

杜兹的透明内涵程序可理解性好,通过同构和细化概念可以比较同一前提、相似结论的程序性语义信息量。但程序的选择具有一定任意性。谓词“没有...是...”,既可以理解成两个个体集的交集为空,也可以理解为不存在某个个体具有两种冲突属性,前者使用“NO”函数,

后者却使用“ $\neg\exists$ ”量化。并且同构和细化概念仍然属于定性方法,它们可以实现命题的程序性语义信息量的排序,却难以满足对不同命题的语义信息量进行加减计算的测度要求。

德·阿劳若(A. de Araújo)将演绎推理的程序性语义视为:为使结论为真,在前提所刻画的数据库结构上所进行的插入与删除操作,程序性语义信息量由最小更新步数决定。他将任意演绎推理的前提刻画为一个数据库 $D=(A,T)_{\text{over } S}$ 。其中结构 A 为数据库中个体词和谓词的诠释,相当于认知者的世界模型或公理系统的已有前提;理论 T 是始终为真的有限一阶逻辑命题,相当于约束数据库变化的核心信念或公理集合;签名 S 为所有实体和谓词指派了符号,相当于语言系统或构式规则。^[21]如令语言系统 $S=(\{a, b, c, d\}, \{S, L\})$,其中 a, b, c, d 是常量符号, S 为一元谓词“是学生”, L 为二元谓词“喜欢”。定义初始数据库 $D_0=(A_0, T)_{\text{over } S}$ 。结构 $A_0=(\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\}, \bar{a}_a, \bar{b}_b, \bar{c}_c, \bar{d}_d, \{\bar{a}, \bar{b}\}_S, \{(\bar{a}, \bar{b}), (\bar{a}, \bar{c}), (\bar{b}, \bar{d})\}_L)$,其中字母不带上划线表示这是 S 中的个体符号,字母带上划线表示这是被符号诠释个体对象。例如 $\bar{a}$ 意为个体 $\bar{a}$ 存在。 $\bar{a}_a$ 意为个体 $\bar{a}$ 被命名为个体符号 a , $\{\bar{a}, \bar{b}\}_S$ 意为个体 $\bar{a}, \bar{b}$ 是学生。 $\{(\bar{a}, \bar{b}), (\bar{a}, \bar{c}), (\bar{b}, \bar{d})\}_L$ 意为个体 $\bar{a}$ 喜欢 $\bar{b}$, $\bar{a}$ 喜欢 $\bar{c}$, $\bar{b}$ 喜欢 $\bar{d}$ 。设 T 是简单的真理论 $=\{\forall x(Sx\rightarrow\exists y(Lxy))\}$,意为任何学生都具有喜欢对象。数据库插入和删除符号 α 是对结构 A_0 进行的,其约束条件是增删操作不能影响与 α 无关的逻辑关系,更新后的结构 A_n 的逻辑关系不能违背理论 T 。如需推导出新的真命题“ $\neg L(\bar{a}, \bar{c})$ ”,即学生 $\bar{a}$ 不喜欢 $\bar{c}$,最小的修改是删除喜欢元组 $(\bar{a}, \bar{c})$,得到新的数据库结构 $A_1=(\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\}, \bar{a}_a, \bar{b}_b, \bar{c}_c, \bar{d}_d, \{\bar{a}, \bar{b}\}_S, \{(\bar{a}, \bar{b}), (\bar{b}, \bar{d})\}_L)$ 。如此“ $D\vdash(\neg L(\bar{a}, \bar{c}))$ ”的最小更新步数为1。对于新的真命题“ $\neg E(\bar{c})$ ”,即 $\bar{c}$ 不存在。最小的修改包含第一步,删除喜欢关系元组 $(\bar{a}, \bar{c})$;第二步,删除命名命题 $\bar{c}_c$;第三步,删除存在命题 $\bar{c}$,最终得到新的数据库结构 $A_2=(\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}\}, \bar{a}_a, \bar{b}_b, \bar{d}_d, \{\bar{a}, \bar{b}\}_S, \{(\bar{a}, \bar{b}), (\bar{b}, \bar{d})\}_L)$ 。故“ $D\vdash(\neg E(\bar{c}))$ ”的最小更新步数为3。与此类似,任何演绎推理都可以视为认知者坚持某些

核心信念，调整世界模型以匹配新命题的数据库操作过程。

德·阿劳若的数据库增删操作法足够精确和定量，也与我们知识更新式的认知过程契合。不过其能否实际用于更复杂的语言系统是值得怀疑的。当理论 T 中公理数量大幅增长，结构 A 中的个体关系和谓词更加复杂，在约束条件下刻画任意新命题的更新步骤并非易事。但原则上，数据库增删操作法确实提供了衡量程序性语义信息的定量且统一的方法，满足了测量理论中的可加性要求。此方案刻画显著性信息直觉的真正不完善之处在于未能指定所排除的认知可能性的具体内容。该问题我们将在下一节回答。

四、世界可能性与认知可能性

现在我们可以回答为什么演绎推理同时具有平凡性直觉和显著性直觉。答案是这两种直觉依赖于不同的信息生成机制。物理学中，玻尔(N. Bohr)认为借助互补性原理可以从认识论上化解光的波粒二象性的困境——只需在研究对象(object)上增设不同的研究现象(appearance)，一种不考虑观测装置，一种考虑观测装置。^[22]类似地，我们也可以在同一个演绎实践“ $\Gamma \vdash \Phi$ ”上增设两个演绎现象“ $\Gamma_{\text{model}} \vdash \Phi$ ”和“ $\Gamma_{\text{procedure}} \vdash \Phi$ ”，前者使用模型论语义信息测量，后者使用程序性语义信息测量。

“ Γ ”相比“ $\Gamma_{\text{model}} \vdash \Phi$ ”在模型论语义信息上是无差异的。模型论语义信息的形成依赖命题在世界模型中获得真值条件时，对世界可能状

态的排除。因此其本质上是一种涉及事实指称的信息。演绎推理的前提集“ Γ ”一旦给定，它对应的世界模型 W_n 就会固定(图1)，其中 n 为 W 的全部可能状态数量。与此同时，“ Γ ”本身所排除的世界可能状态数量 e 也就确定。演绎推理的前提集和结论集的并集为“ $\Gamma \cup \Phi$ ”：根据真值蕴涵规则，“ Φ ”所排除的可能状态始终是“ Γ ”所排除的可能状态的子集。因此演绎前后命题集“ Γ ”和“ $\Gamma \cup \Phi$ ”所排除的世界可能状态的最大集合是相同的(均由“ Γ ”决定)。根据香农的信息量与概率成反比的计算公式 $I(s_i) = -\log P(s_i)$ ，演绎推理前后表达式的模型论语义信息量 $I_{\text{model}} = -\log((n-e)/n)$ 。由于 e 和 n 都是由“ Γ ”确定的常数，所以演绎推理过程中最大模型论语义信息量始终恒定。这在演绎推理的世界模型 W_n 中体现为 W_n 的复杂度 n 是固定的，结论 Φ 所排除的世界可能状态数量(虚线分支)始终不超过前提 Γ 所排除的可能状态数量 e 。

“ Γ ”相比“ $\Gamma_{\text{procedure}} \vdash \Phi$ ”在程序性语义信息上是有差异的。程序性语义信息的形成依赖于命题在认知模型中被赋予构造程序时，对认知可能状态的排除。因此其本质上是一种涉及概念运作的信息。演绎推理的前提集“ Γ ”一旦给定，它被任意程序构造的操作步数就设为初始值零，即给定为真的东西没有排除任何认知可能状态。演绎推理的前提集和结论集的蕴涵式为“ $\Gamma \rightarrow \Phi$ ”：按照数据库增删操作法，它被程序构造的最小操作步数 x 也可以确定($x \in \text{自然数 } N$)。与恒定的世界模型不同的是，认知模型 C_x (图1)不是由演绎前的命题集“ Γ ”决定，而是由演绎后的蕴涵式“ $\Gamma \rightarrow \Phi$ ”不断更新的。

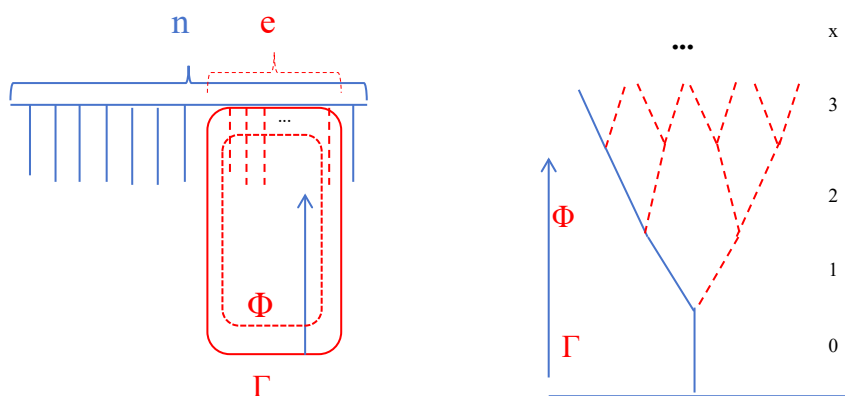


图1 世界模型 W_n (左)与认知模型 C_x (右)

设每步操作如此这般发生的概率为 $1/2$, 且各操作之间概率独立。则 x 步之后的由操作及其逻辑反面构成的认知分支就有 2^x 个。我们选择的认知分支仅为当下一个, 其余分支均为被排除的认知可能性。因此, 演绎推理后表达式的程序性语义信息量 $I_{\text{procedur}} = -\log(1/2^x)$ 。由于 x 是个变量, 所以演绎推理过程中随着所需操作步数增长, 程序性语义信息量会不断变化。这在演绎推理的认知模型 C_x 中体现为 C_x 的复杂度 x 是增长的, 结论 Φ 所排除的认知可能状态数量(虚线分支)始终不少于前提 Γ 所排除的可能状态数量零。

因此, 平凡性直觉和显著性直觉的断言所构成的逻辑悖论“ $[I(\Gamma \vdash \Phi) = I(\Gamma)] \wedge [I(\Gamma \vdash \Phi) > I(\Gamma)] \equiv \perp$ ”就可以被化解为“ $[I_{\text{model}}(\Gamma \vdash \Phi) = I_{\text{model}}(\Gamma)] \wedge [I_{\text{procedure}}(\Gamma \vdash \Phi) > I_{\text{procedure}}(\Gamma)] \not\equiv \perp$ ”。即演绎推理既有不变的模型论语义信息, 也有变化的程序性语义信息, 这并不导致矛盾。两种信息的区分使我们能够重新看待演绎推理的分析性和综合性。欣蒂卡认为演绎推理的分析性最好被理解为结论所使用的认识论资源已经包含在前提之中了, 而非前提包含了这些资源的全部使用方式。^[17] 康德在论述先天综合判断时也认为, 虽然范畴和直观是先天拥有的东西, 但对表象的创造性连接仍然扩展了我们的知识。^[23] 因此演绎推理的过程, 既可以视作分析性的, 如果我们将分析性定义为推理前后世界模型中最大真值条件的恒定, 即演绎结论是否为真已经包含在前提之中; 也可以视作综合性的, 如果我们将综合性定义为推理前后认知模型的中最大认知分支的更新, 即演绎结论如何为真并未包含在前提之中。例如几何学命题“两点之间直线最短”。虽然我们在世界模型中已经掌握了点的概念、线的概念、长短的概念, 但这并不足以让我们得出两点之间直线最短的结论。只有通过感性直观在两点之间设想各种弯曲的线, 再将其与直线进行对比, 然后才能构造出两点之间直线最短的判断。

分析-综合型的演绎推理, 在数学中屡见不鲜。例如, “怀尔斯(A. Wiles)证明了费马大定理: 当整数 $n > 2$ 时, $x^n + y^n = z^n$ 没有整

数解”, 并且“怀尔斯证明了费马大定理”蕴涵“费马大定理为真”。演绎前后的表达式在关于世界状态的模型论语义信息上没有任何差异——怀尔斯的证明成功与费马大定理的真。但只有我们排除了费马大定理为假的相关替代项、了解了其证明过程、或者理解了其为真的构造方式, 才能真正获得演绎推理的程序性语义信息。该演绎的程序性语义信息可以用一个反证法概括: 前提一: 假设费马大定理为假: 即当整数 $n > 2$ 时, $x^n + y^n = z^n$ 有整数解。前提二: 当整数 $n > 2$ 且 $x^n + y^n = z^n$ 有整数解时, 椭圆曲线 $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$ 不具有模性(modularity)。前提三: 每一条椭圆曲线都对应模空间(modular space)的一个模。结论: 前提一、二、三同时为真时蕴涵矛盾, 已知前提二、三为真, 故前提一为假, 等价于费马大定理为真。^[24] 这个程序性语义信息的获得耗费了数学家超过三百年的认知劳动, 即使一个现代人学会所需的数学工具, 也得进行新一轮的认知构造才能识别出结论。推而广之, 任何演绎推理的前提只是给定了世界模型中真值资源的类型和数量, 但丰富的定理需要对认知模型中认知资源的创造性配置才能获得。

结 论

演绎推理的平凡性直觉与显著性直觉都来自认知者与演绎推理系统的交互——世界模型、认知模型及相关可能性的排除, 并且模型论语义信息和程序性语义信息均可具有定量公式。卡尔纳普和巴-希尔的模型论语义信息刻画了平凡性直觉的意义——演绎推理后的命题集“ $\Gamma \cup \Phi$ ”在世界模型中所排除的世界可能状态永远不会超过前提“ Γ ”所排除的世界可能状态, 演绎前后的命题集在模型论语义信息方面是无差异的。我们结合德·阿劳若的数据库增删操作法与认知分支模型所开发的程序性语义信息刻画了显著性直觉的意义——演绎推理后的表达式“ $\Gamma \rightarrow \Phi$ ”在认知模型中所排除的认知可能状态永远不会少于“ Γ ”所排除的认知可能状态, 演绎前后的表达式在程序性语义

信息方面是有差异的。模型论语义信息描绘了演绎推理中真值条件的机械性传递。这可以视为演绎推理指向事实世界的信息。程序性语义信息则反映了演绎推理中认知可能性的生灭。这可以被视为演绎推理指向概念系统本身的信息。程序性语义信息的获得往往有助于我们把握命题的模型论语义信息，且模型论语义信息的在先获得并不意味着程序性语义信息没有价值。演绎推理的无信息直觉和有信息直觉运行在不同的层面，因此两者并不构成有关演绎的丑闻。本文加深了对演绎推理的认知理解，并且重新诠释了经典的分析性和综合性概念。其还具有两方面的延伸意义，一是为科学理解的机制解释和理解深度的测度问题提供了富有操作性的工具箱，二是演绎系统作为部分人工智能的基础，程序性语义信息有利于重新审视其意义奠基难题。

[参考文献]

- [1] Ayer, A. G. *Logical Positivism*[M]. New York: The Free Press, 1966, 12.
- [2] Shannon, C. E., Weaver, W. *The Mathematical Theory of Communication*[M]. Urbana: University of Illinois Press, 1964, p.37.
- [3] 维特根斯坦. 逻辑哲学论[M]. 贺绍甲 译, 北京: 商务印书馆, 2005, 58.
- [4] 弗雷格. 弗雷格哲学论著选辑[M]. 王路 译、王炳文 校, 北京: 商务印书馆, 2006, 21.
- [5] 柏拉图. 柏拉图全集(一)[M]. 王晓朝 译, 北京: 人民出版社, 2012, 506.
- [6] Cohen, M. R., Nagel, E. *An Introduction to Logic and Scientific Method*[M]. New York: Harcourt, Brace, 1934, 173.
- [7] Hintikka, J. *Logic, Language Games and Information: Kantian Themes in the Philosophy of Logic*[M]. Oxford: Clarendon Press, 1973, 222.
- [8] Lombardi, O., Holik, F., Vanni, L. W. 'What is Shannon Information'[J]. *Synthese (Dordrecht)*, 2016, 193(7): 1983–2012.
- [9] D'Agostino, M. 'The Philosophy of Mathematical Information'[A], Floridi, L. (Ed.) *The Routledge Handbook of the Philosophy of Information*[C], New York: Routledge, 2016, 164–179.
- [10] Bar-Hillel, Y., Carnap, R. *An Outline of a Theory of Semantic Information*, Tech. Rep. No. 247[M]. Research Lab. of Electronics, Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge, MA, 1952.
- [11] Floridi, L. 'Is Semantic Information Meaningful Data'[J]. *Philosophy and Phenomenological Research*, 2005, 70(2): 351–370.
- [12] Floridi L. 'Semantic information'[A], Floridi, L. (Ed.) *The Routledge Handbook of the Philosophy of information*[C], New York: Routledge, 2016, 44–49.
- [13] Dretske, F. I. 'Epistemic Operator'[J]. *The Journal of Philosophy*, 1970, 64(24): 1007–1023.
- [14] Dretske, F. I. *Knowledge and the Flow of Information*[M]. Cambridge: MIT Press, 1981, 219.
- [15] D'Agostino, M., Floridi, L. 'The Enduring Scandal of Deduction: Is Propositional Logic Really Uninformative'[J]. *Synthese*, 2009, 167(2): 271–315.
- [16] D'Agostino, M., Finger M., Gabbay, D. M. 'Semantics and Proof Theory of Depth-bounded Boolean Logics'[J]. *Theoretical Computer Science*, 2013, 480: 43–68.
- [17] Hintikka, J. 'Are Logical Truths Analytic'[J]. *The Philosophical Review*, 1965, 74(2): 178–203.
- [18] Johnson-Laird, P. N. 'Procedural Semantics'[J]. *Cognition*, 1977, 5: 189–214.
- [19] 党学哲. 证明论语义及其意义颗粒度[J]. 逻辑学研究, 2024, 17(1): 69–86.
- [20] Duží, M. 'The Paradox of Inference and the Non-Triviality of Analytic Information'[J]. *Journal of Philosophical Logic*, 2010, 39(5): 473–510.
- [21] de Araújo, A. 'Semantic Information and Artificial Intelligence'[A], Müller, V. C. (Ed.) *Fundamental Issues of Artificial Intelligence*[C], Cham: Springer International Publishing, 2016, 127–138.
- [22] Lindenberg, S., Oppenheim, P. 'Generalization of Complementarity'[J]. *Synthese*, 1974, 28: 117–139.
- [23] 康德. 纯粹理性批判[M]. 邓晓芒 译、杨祖陶 校, 北京: 人民出版社, 2004, 10.
- [24] 西蒙·辛格. 费马大定理——一个困惑了世间智者358年的谜[M]. 薛密 译, 桂林: 广西师范大学出版社, 2013, 151–175.

[责任编辑 王巍 谭笑]