第 48 卷 第 5 期（总 333 期） 自然辩证法通讯 Vol.48, No.5 (Serial No.333)
2026 年 5 月 Journal of Dialectics of Nature May 2026

两种证明观念间的张力

The Tension Between Two Ideals of Proof

杨帆 /YANG Fan

（大连海事大学公共管理与人文学院，辽宁大连，116026）
(College of Public Administration and Humanities, Dalian Maritime University, Dalian, Liaoning, 116026)

摘　要：哈金提出的两种证明观念把握了数学证明的内在特性，并明确地建立起二者对立与互补的态势，从而使得两种证明观念间的张力得以显现。从数学史的视角来看，数学家们从未对证明观念达成完全一致，因此两种证明观念间的张力是数学哲学中不容忽视的议题。从哈金的论述出发，通过对数学史中若干案例的考察，可以将两种证明观念与数学实践中的形式化证明和非形式化证明进行对应，从而加深对两种证明观念及其间张力根源的理解。

关键词：数学证明　数学哲学　形式化证明　非形式化证明

Abstract: The two ideals of proof proposed by Ian Hacking capture the intrinsic character of mathematical proof and explicitly establish the opposing and complementary situation, thus allowing the tension between the two ideals of proof to emerge. From the perspective of the history of mathematics, mathematicians have never reached an absolute agreement on the ideal of proof, so the tension between the two ideals of proof is a topic that cannot be ignored in the philosophy of mathematics. Starting from Hacking's account, by examining a number of cases in the history of mathematics, it is possible to correspond the two ideals of proof to formal and informal proof in mathematical practices, thus deepening the understanding of the two ideals of proof and the source of the tension between them.

Key Words: Mathematical proof; Philosophy of mathematics; Formal proof; Informal proof

中图分类号：N031; O1-0　DOI: 10.15994/j.1000–0763.2026.05.006　CSTR: 32281.14.jdn.2026.05.006

加拿大哲学家哈金（Ian Hacking）曾经提出了两种不同的证明观念：笛卡尔式证明（cartesian proof）和莱布尼茨式证明（leibnizian proof）。前者是“经过一些沉思和研究，一个人完全理解并‘瞬间’涌入脑海”（[1]，p.21）的证明，后者是“每一步是精心设计并且可以用机械的方式逐行检验”（[1]，p.21）的证明。这两种证明观念的区分指明了人们对待数学证明的不同立场，而二者间所呈现出的张力也反映出数学实践方法的差异。事实上，两种证明观念的对立与互补一直存在于数学发展的漫长历史中。因此，在哈金论述的基础上详细考察两种证明观念及其间的张力是很有必要的。正如美国数学家哈里斯（Michael Harris）所指出的：“哈金将这两种态度平行对待的一致性，如果被其他哲学家所追随，可能会有助于调和数学哲学与数学。”[2]

对两种证明观念的最初讨论源自1973年哈金的不列颠学院Dawes Hicks哲学讲座“Leibniz and Descartes: Proof and Eternal Truths”，后来

基金项目：辽宁省社会科学规划基金青年项目“数学哲学的实践转向研究”（项目编号：L24CZX001）。
收稿日期：2025年4月1日
作者简介：杨　帆（1993–）男，辽宁营口人，大连海事大学公共管理与人文学院讲师，研究方向为数理逻辑与数学哲学。
Email: fanyang@dlmu.edu.cn

收录于哈金的文集《历史本体论》（*Historical Ontology*）中。[3]在《为什么会有数学哲学？》（*Why is There Philosophy of Mathematics at All?*）一书中，哈金进一步探讨了两种证明观念在数学哲学中的影响。值得注意的是，在哈金丰富的科学哲学思想中，两种证明观念似乎并未处于其思想核心。这并不意味着两种证明观念是不重要的。其实，哈金对两种证明观念的考察恰恰反映出他一贯从思想史着手探寻概念的生成与转变的研究路径。本文试图通过延续哈金的研究路径来表明，两种证明观念间存在着一股张力，并且这两种证明观念及其间的张力在数学中有着直接的对应。藉由对这种张力所展现的对立与互补态势的考察，我们将从数学实践的视角重新探寻张力的根源。

一、哈金论两种证明观念

从两种证明观念的命名不难看出，它们可以追溯到笛卡尔与莱布尼茨这两位哲学家（同时也都是数学家）的思想。早在1973年的讲座中，哈金就比较分析了笛卡尔和莱布尼茨在证明观念上的区别。在哈金看来，二者的区别源于对真理和证明间关联的认识不同：“莱布尼茨认为真理是由证明构成的。笛卡尔认为证明与真理无关。”（［3］，p.204）

作为近代哲学中唯理论的奠基人，笛卡尔注意到了“随着予以考察的方式各异，获知这些命题，有些是通过直观，有些则通过演绎；然而，起始原理本身则仅仅通过直观而得知，相反，较远的推论是仅仅通过演绎而获得。”（［4］，p.13）这表明笛卡尔将直观和演绎作为发现真理的手段，并且相比于演绎来说，直观更具备直接性与全局性。哈金将笛卡尔的证明观念类比为苏格拉底的反诘法，他认为笛卡尔在《第一哲学沉思集》中阐述的是一种古老的证明观念。（［1］，p.26）

与笛卡尔的证明观念不同，莱布尼茨追求的是明晰性与确定性，他希望通过普遍字符实现“推理能够通过各种数字得到证明或检验”。[5]通过对莱布尼茨关于普遍字符构想的分析，哈金指出：“洞见变得与认识证明的有效性无关，真理变得‘机械’。”（［3］，p.203）这表明机械化的思想经由莱布尼茨渗透到证明观念中，此后证明观念才进入了现代进程，因为它实则转变了自欧几里得以降的证明观念，将证明的形式提升至一个重要的位置。事实上，欧几里得在《几何原本》中所作出的证明，虽然是建立在公理化体系上的，但是其中很多的过程都依赖于直觉。以《几何原本》第一卷中的命题20“在任意三角形中，任意两边之和大于其余一边”[6]的证明为例，我们必须要对三角形的几何图形有所直觉才能够理解并证明这一命题。然而，数学中的直觉有时是不可靠的，数学史家克莱因（Morris Kline）曾对这一点有过说明。[7]他给出的例子是魏尔斯特拉斯函数：过去的数学家曾普遍认为连续函数是可导的，魏尔斯特拉斯函数的连续却处处不可微的性质改变了这一共识。另一个类似的例子同样来自数学分析中的病态函数狄利克雷函数，它处处不连续、黎曼不可积却勒贝格可积。

虽然笛卡尔式证明与莱布尼茨式证明可以追溯到上述两位哲学家的思想，但是需要指出的是这两种证明观念是由哈金正式提出的，因此其内涵并不完全等同于笛卡尔和莱布尼茨的思想。为了作以区别，哈金在英文术语中使用的是小写的“cartesian”和“leibnizian”，而非直接以大写人名作为术语。按照哈金的说法，笛卡尔和莱布尼茨在证明观念方面的分歧本质是为解决17世纪的认识论问题，（［3］，p.200）哈金提出两种证明观念的目的是探寻其在数学中的影响。从两种证明观念在数学中的具体表现出发，我们可以总结出它们各自的特征：

笛卡尔式证明的特征是依赖于直觉（直观），因为直觉可以认识基本概念直至证明本身。笛卡尔非常重视直觉在认识过程中的作用，他将其视作“纯净而专注的心灵的构想”,（［4］，p.12）并认为“这种构想由于更单纯而比演绎本身更为确实无疑”。（［4］，p.12）也就是说，凭借直觉获取的信念是先于演绎的，因而是显然的（obvious），这意味着不需要再对其进行额外的说明。“显然的”是一个语境化的性质，

数学家在数学实践中省略证明步骤时经常会声称其为“显然的”，这既默认了后续陈述的直觉性，也默认了读者具备基本的背景知识。

莱布尼茨式证明的特征是机械化和形式化的。莱布尼茨对于以机械方式进行检验的追求使得证明必须是形式化的，因此证明将完全由符号化的人工语言写出。因为自然语言是含混的，这会为证明带来不够精确的成分，而这正是莱布尼茨式证明所不能容许的。形式化的证明一定是严格的，因为它不会省略任何细节，证明中的每个步骤都必须是遵循推理规则的。

为了体现两种证明观念在当今数学界的延续，哈金选取了两位当代数学家的思想作为范例，分别是法国数学家格罗滕迪克（Alexander Grothendieck）和俄罗斯数学家沃伊沃茨基（Vladimir Voevodsky）。他将格罗滕迪克的思想视为笛卡尔式证明的终极范例，而将沃伊沃茨基的思想视为莱布尼茨式证明的终极范例：“格罗滕迪克要求进行持续的概念分析，就像拉卡托斯的证明与反驳的辩证法一样，它最终以概念间的关系是‘显然的’而结束，于是被证明的定理就会立即以笛卡尔的方式被理解为真的。沃伊沃茨基不仅建议对证明进行更多的计算式搜寻，而且建议数学期刊只有在有机器可读的证明被提供时才会接受定理的发表：终极的莱布尼茨情形。”（[1]，p.141）格罗滕迪克擅长以普遍性的视角思考数学问题，其特点是“在处理某个具体问题的时候，数学家将其纳入一个抽象的结构框架，然后借助一系列离解和拓展步骤来逐渐‘软化’它。”[8] 在他的自传中，格罗滕迪克也提及直觉对于理解概念的重要性：“每次这样的发现都通过意想不到的直觉与特定概念相关联，从而丰富了我们对两个概念的理解。”[9] 而沃伊沃茨基的思路是：“为了验证证明，我们需要构建一个‘特定的’形式演绎系统，并解释它如何与存在于我们思想中的数学对象和推理形式相对应。”[10] 这一目标是将数学转化到特定的形式系统中去表示。沃伊沃茨基及其所宣扬的计算机辅助证明显然是莱布尼茨式证明的极端形式，它消解了证明中一切可能的直觉，走向了完全形式化的道路。

二、两种证明观念各自的问题

既然两种证明观念的特征是如此的不同，那么我们能否宣称某种证明观念切实地优于另一种呢？哈金对这个问题给出的否定答案阐明了张力的所在：“没有哪一种（观念）是完全正确或者完全错误的，因为证明总是一个或一组不断发展的概念。”（[1]，p.40）在上一节的分析中，我们已经看到了两种证明观念各自特征所呈现的直觉与形式间的对立态势，本节我们将从两种证明观念各自的问题出发，尝试说明两种证明观念在解决问题时的互补态势。

笛卡尔式证明强调诉诸直觉，这会导致数学中的认知非正义。认知非正义（epistemic injustice）是弗里克（Miranda Fricker）提出的用于刻画认知过程中非正义现象的概念，主要包括证词非正义和解释非正义，前者指的是“偏见导致听者降低对说者的话的可信度”，（[11]，p.1）后者指的是“集体解释资源的差距使某人在理解其社会经验时处于不公平的劣势”。（[11]，p.1）作为人类认知过程中的一项重要活动，数学中同样存在着各种认知非正义。利特伯格（Colin Jakob Rittberg）等使用印度数学家拉马努金（Srinivasa Ramanujan）的例子用以说明数学中认知非正义的产生。[12] 拉马努金以其异于常人的数学直觉而闻名，他不喜为自己给出的公式作出证明。严格来说，在拉马努金的例子中我们已经不能看到任何与我们熟知的“证明”相关的要素了，仅仅能够感受到直觉的力量。将数学知识过度归于直觉的结果是使其无法被数学共同体检验。数学证明并不只是由某位数学家写出就可以称为数学证明，必须得到数学共同体的承认。俄罗斯数学家马宁（Yuri Manin）曾指出，“一个证明只有在‘接受其为证明’的社会行为后才会成为证明。”[13] 因此检验之于数学证明被“接受为证明”是很关键的一环。

拉马努金的例子或许过于极端，为了体现笛卡尔式证明导致的认知非正义在当今数学界仍然存在，我们选取日本数学家望月新

一（Shinichi Mochizuki）的例子来进行说明。2012年，望月新一声称证明了abc猜想并将论文发布于个人主页，但是他提供的证明过于晦涩，同时部分内容缺乏详细证明，因此并没有获得数学共同体的广泛承认，以德国数学家舒尔茨（Peter Scholze）和斯迪克斯（Jacob Stix）为代表的一些数学家认为望月新一的证明是不成立的。为了证明abc猜想，望月新一提出了崭新的IUT理论（Inter-universal Teichmüller theory），其中包含了大量新奇的概念和术语。加藤文元在介绍望月新一的工作时指出："IUT理论是在一个全新的框架里使用全新的语言和概念体系建构起来的理论，它是无法在通常的数学范式里进行解释和说明的。"[14] 望月新一的例子与拉马努金的区别在于，拉马努金没有给出符合数学共同体范式的证明，而望月新一确实给出了证明，只不过他的证明并不能为数学共同体所普遍接受。在最新的博客文章中，望月新一再次表示IUT理论是成熟的数学理论，因为其核心内容已经发表于同行评议的数学专业期刊（由京都大学数学科学研究所主办的*Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, SCIE收录）。而舒尔茨和斯迪克斯的反驳从未发表于任何同行评议期刊，并且二人多次拒绝与望月新一展开深入讨论。此外，绝大多数援引舒尔茨二人观点以反驳望月新一的其他数学家，其理由几乎都是舒尔茨二人是顶尖数学家（因而他们是正确的），而非更加精确的细节指正，颇有诉诸权威之嫌，由此望月新一认为这是一种对学术规范和原则的公然漠视。[15] 望月新一的遭遇同时兼具证词非正义和解释非正义两个方面：一方面，他的工作遭到了一些数学家的误解和漠视；另一方面，当前数学界缺乏有力证明abc猜想的工具，而他自创的IUT理论却又面临着难以被理解的困境。

笛卡尔式证明在可检验性方面本来就存在着不足，望月新一使用的新理论则放大了这种不足。既然证明建立在对新的概念体系的直觉理解上，那么一旦这种理解无法形成，其所支撑的证明就不可能被数学共同体接受。然而面对笛卡尔式证明，即便是数学共同体的检验也不可避免地会混入直觉的因素，莱布尼茨式证明则会使得证明的检验不会受到直觉的干扰，由此人们寄希望于借助计算机验证abc猜想的证明，美国数学家萨瑟兰（Andrew V. Sutherland）却在Persiflage博客中评论道："任何可以被计算机详细阐述的证明，都必须完全由数学家理解的步骤组成。"[16] 虽然莱布尼茨式证明有望解决笛卡尔式证明的困境，但是对于望月新一的例子来说，其他数学家首先要做的是理解它，然后才能将其置于计算机中进行检验。不过，望月新一本人对计算机检验仍然抱有期待："尽管形式化可能无法解决社会问题，但是它代表了最好并且或许是唯一可实现的技术，从而能将数学真理从社会因素束缚中解脱出来。"[15]

然而，莱布尼茨式证明的问题在于它使得证明的有效性与其证明的内容相分离，人为地割裂了形式与内容间的联系。当一个莱布尼茨式证明摆在面前，藉由推理规则我们可以判断出这个证明是否正确，这些工作当然很有价值。然而，数学家会进一步追问"然后呢？"——数学家所感兴趣的不仅仅是证明为什么是正确的，更重要的是他们能够从证明中得到哪些深刻的、非平凡的洞见。数学家为什么要进行证明？有人认为是为了发现新的数学定理。那么当勾股定理首次被证明后，是否后续不同方法的重复证明就没有意义了呢？答案是否定的，人们仍然乐于提出关于勾股定理的不同证明方法。这并不是为了不断地验证勾股定理为真，而是出于创造的乐趣。不同的证明虽然已经不会为验证定理提供更多的贡献，但是它们确实提出了新的具有启发性的方法和问题，例如费马大定理就源自对勾股定理的推广。因此，数学证明除了为一个数学定理提供确证外，它还是启发新的数学思想和方法的重要源泉，莱布尼茨式证明并不能够完成这样的任务。

此外，莱布尼茨式证明也不能提供关于数学证明的理解。阿维加德（Jeremy Avigad）与哈里森（John Harrison）指出，"一种形式化、符号化的证明在很大程度上是人类无法理解

的，因此无助于增强我们的理解。”[17]理解建立在对语言和规则的理解上，如果大多数数学家都不理解莱布尼茨式证明的话，就势必会影响其在数学共同体中的传播，它更像是一串密文，即便经过了计算机的验证，也不会带来除了正确性之外的任何理解与洞见。翻开怀特海和罗素的《数学原理》（这部巨著是莱布尼茨式证明的应用案例），人们会发现书中充斥着大量奇异的符号，一方面现在的用法已与彼时大有不同，另一方面也是因为其形式系统是难以理解的。

事实上，两种证明观念在直觉和形式方面都是具有程度的。极端的笛卡尔式证明情形中，直觉的作用被无限放大，例如拉马努金甚至不能给出一个证明，认知非正义的现象就会出现。即便是不完全依赖于直觉的望月新一，也不可避免地会遇到这样的困境，因此计算机验证似乎成为了解决问题的途径；极端的莱布尼茨式证明情形中，完全形式化成为了主导，这使得证明忽略了数学中的创造力与洞见，不过这个问题反过来又可以由笛卡尔式证明来弥补。这令我们看到，二者间的张力不仅存在着特征上的相互背离，而且在一些特定的缺陷方面存在着相互补充的态势。

三、非形式化证明与形式化证明

倘若我们将目光从哲学分析转移到数学实践，那么哈金提出的笛卡尔式证明和莱布尼茨式证明可以分别对应于非形式化证明（informal proof）和形式化证明（formal proof）。简单来说，非形式化证明是数学家在数学实践和日常交流中通用的证明，一般包含了自然语言和必要的符号，其推理过程中的一些显然的步骤会被省略；形式化证明是使用人工语言编写的证明，其中的每一步都或者是公理，或者是使用推理规则从前面的步骤推出的，不能省略任何细节。上述对应关系在哈金的论述中多次隐含地出现，例如“形式化证明的概念是莱布尼茨时代创造的”，（[3]，p.212）而格兰维尔（Andrew Granville）则直接指出哈金的两种证明观念同非形式化证明与形式化证明间存在着对应关系。[18]因此，把握两种证明观念间的张力应当通过这种对应寻求进一步的理解，这一方面体现在前面讨论过的对立与互补的态势中，另一方面则体现在对于非形式化证明与形式化证明所持有的立场上。我们至少可以区分出以下三种对待非形式化证明与形式化证明的立场：

第一种是反对形式化证明的立场。拉卡托斯（Imre Lakatos）指出：“只有当形式系统是已建立的非形式数学理论的形式化时，我们才能说到形式系统。”（[19]，p.99）也就是说，形式化证明是非形式化证明的理性重建。数学家对于定理证明的认识是先建立在笛卡尔式的非形式化证明上的。当然，拉卡托斯是坚定地反对形式化证明的，“形式化可能给非形式思想实验增加的证明力和说服力是多么地小。”（[19]，p.106）由此，哈金将拉卡托斯归为笛卡尔式证明的支持者，“（拉卡托斯的）《证明与反驳》是笛卡尔式证明形成的指导手册——通过解决反驳来澄清思想。”（[1]，p.31）拉卡托斯关于多面体欧拉定理的讨论是一个说明直觉在证明中作用的例子。在这个例子中，拉卡托斯试图表明数学知识的增长是一个证明与反驳的进程，[20]这在某种程度上削弱了形式化证明对数学知识的作用。当然，非形式化证明在拉卡托斯那里是服务于其背后的数学拟经验主义和可谬论的，其作用是充当数学假说–演绎中的证伪者角色。

第二种是倡导形式化证明的立场。随着计算机辅助证明的日益普及，这种立场逐渐在数学界广泛传播。秉持这种立场的人大多是计算机辅助证明的实践者，他们对非形式化证明经常出现的错误感到不满，这些错误通常涵盖“推理中的空白、诉诸错误的直觉、不精确的定义、误用背景事实、繁琐的特殊情形和作者没有检查的附加条件等”。[17]沃伊沃茨基就曾回忆自己早年间论文中的错误，并表示“唯一真正的长期解决方案是开始使用计算机验证数学推理”。[21]支持者认为，形式化证明对于数学的影响是不容忽视的。美籍华裔数学家、机器证明的先驱王浩曾预言其“长远看有可能实现大

规模的数学革命”，[22]不过他更希望藉由此，“人对数学活动的贡献将不得不少一些程式化的方面，而多一些富有想象力和创造性的内容。”[22]望月新一同样看到了形式化证明的革命性前景：“经过Lean风格计算机形式化处理的数学所具有的严格性，可能会引发大学招聘/晋升制度和数学期刊同行评议制度的商业模式的根本革命。”[15]在当前的形式化证明社区中，维迪克（Freek Wiedijk）是公开宣称形式化证明是数学革命的，[23]我们则在维迪克的基础上论述了形式化证明为何是一场数学革命，[24]论证思路是数学家对数学证明的检验无法规避人脑证明易错的缺陷，而计算机对数学证明的检验的准确性要高得多。如此看来，至少在检验证明的正确性方面，形式化证明驱动的计算机辅助证明是数学革命。

第三种是折中与调和的立场。麦克白（Danielle Macbeth）为这个立场作出了精辟的总结：“一方面是洞见和理解，另一方面是信念和真理，它们并非是互不相容的。”（[25]，p.2121）赫什（Reuben Hersh）注意到形式化证明与非形式化证明分别在理论层面和实践层面具备的不同含义。[26]虽然赫什也指出形式化证明的意义依赖于对非形式化证明的检验，但是他对于两种证明的立场更加地温和。在他看来，“证明可以说服，也可以解释”，[26]因而调和的思路是非常自然的，那就是取决于证明目的的不同：“在研究中，说服是主要的；在课堂中，解释是主要的。”[26]

四、张力的根源

为什么在两种证明观念间会存在这样的张力？哈金将差异与张力归因于笛卡尔与莱布尼茨在解决认识论问题时真理观的分歧，其背后有着深刻的科学与时代背景。正如哈金所阐释的，摆在笛卡尔与莱布尼茨面前的问题是“17世纪早期科学活动的成功已经造成了人类对自己所知事物认识的危机”。（[3]，p.208）笛卡尔对亚里士多德主义抱有不满，他选取了一条激进的路径去处理，将永恒真理看作是上帝的创造。相较而言，莱布尼茨的路径看似更加传统，却意外（或不意外）地成为了现代数学证明观念的奠基。麦克白认为，笛卡尔与莱布尼茨在证明观念方面的对立甚至可以追溯到古希腊时期柏拉图与亚里士多德间的争论，[25]这就给两种证明观念的问题赋予了更深层次的哲学史背景。

当然，哈金对张力根源的分析建立在他的思想史研究方法上。如果我们将由两种证明观念驱动的数学实践纳入考察的范围，就会看到张力的根源来自三个不同层面。首先是两种证明观念的语境不同。关于数学证明与语境的关系，康仕慧曾指出：“数学证明的产生是在数学共同体共有的语境中完成的。数学证明依赖语境，而语境的核心则是理解，因此理解是证明的核心。”[27]数学是一项人类活动，而数学证明本质上是人为建构的，所以其表现形式就必然取决于建构的语境。笛卡尔式证明是在数学知识的增长、交流与传播的过程中广泛使用的，拉卡托斯关于欧拉定理的例子说明了其在数学知识的增长中的作用，而数学知识在交流与传播的过程中必须确保听者和说者在同一语境下，望月新一的证明不被认可恰恰是因为他自创的IUT理论不在主流数学共同体的约定范畴中，因而成为了一个反例。相反，莱布尼茨式证明并不存在于交流与传播的语境中，因为它不是可读的证明。康仕慧认为：“书面的形式化的数学证明在某种程度上实际上则是演讲者试图使听众信服的结果。”[27]

其次，语境层面的不同已是数学证明在交流过程中的体现，两种证明观念生成的先后顺序也是不同的。在数学家大脑中生成数学证明的进程中，数学家先要有对于数学证明的整体性直觉把握，才能够给出一个数学证明。数学家不可能在脱离直觉与理解的情况下直接逐步写出一个数学证明。这意味着，笛卡尔式证明一定是先于莱布尼茨式证明出现的。在第三节拉卡托斯关于形式化证明与非形式化证明的关系的论述中，我们也能够看到类似的处理。此外，英国数学家阿蒂亚（Michael Atiyah）的话同样说明了二者的先后顺序：“与其他自然科

学的情形一样，数学中的一个发现也要经几个阶段才能实现，而形式证明只是其中的最后一步。”[28]换句话说，莱布尼茨式证明只不过是对于数学家直觉获取对研究对象认识的一个检验，那是数学认知过程中的最后阶段，它为笛卡尔式证明提供了机械检验的方案，为笛卡尔式证明的正确性提供了保证。

最后，两种证明观念中人的主体性地位也是不同的。笛卡尔式证明强调直觉这种主观意识的功能，人在笛卡尔式证明的生成进程中必须处于主体地位。没有了人的存在，就谈不上理解证明。莱布尼茨式证明则不同，它所强调的是对证明的机械检验，这个检验过程可以交给人来完成，如今也可以交给计算机来完成，这是因为莱布尼茨式证明建立在客观的逻辑规律之上。然而，计算机既不具备理解的能力，其提供的检验也并不是可读的。

五、余论：非此即彼？

哈金对两种证明观念的划分很容易导出一种关于证明观念的二元论，正如麦克白所阐明的：“似乎只有两种选择：要么认为数学推理是演绎的，因此仅是形式化和解释的，而非扩展的；要么相反地认为数学推理是扩展的，是新知和洞见的来源，因此不能仅是形式化和演绎的。”（［25］，p.2119）然而，哈金明确反对了这样一种证明观念的二元论，并指出计算机对四色定理的证明“既不是笛卡尔式的，也不是莱布尼茨式的”，（［1］，p.64）从而为证明观念的扩张留有余地。它不依赖于人脑的直觉，也不是逐步式的形式化证明。概言之，哈金的两种证明观念既非简单的二分法，亦非相互矛盾的观念。

以哈金的原始论述为开端，我们首先看到了笛卡尔式证明与莱布尼茨式证明在特征上的对立，这很大程度上源于对直觉与形式的重视程度不同；其次，在两种证明观念各自导致的问题中，张力变得更加清晰：一种证明观念的问题需要另一种证明观念协助解决。至此，张力所蕴含的对立与互补态势得到了展现；再次，我们发现两种证明观念在数学实践中的对应，即非形式化证明与形式化证明，对二者的多元立场再一次反映出两种证明观念间的张力；最后，我们以数学实践中的证明为基础对张力的根源进行了三个层面的分析，试图丰富哈金的论述。

无论如何，两种证明观念都在数学的发展进程中起到了不容忽视的作用，笛卡尔式证明所包含的创造性洞见是数学前行的恒久动力，莱布尼茨式证明驱动的计算机辅助证明在当今数学中带来的范式变革也同样令人振奋和心怀期待。如何处理好两种证明观念间的张力，发挥其各自的优势，是数学家在具体的数学实践中应当考虑的问题。

［参 考 文 献］

［1］Hacking, I. *Why is There Philosophy of Mathematics at All?*［M］. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

［2］Harris, M. *Mathematics Without Apologies: Portrait of a Problematic Vocation*［M］. Princeton: Princeton University Press, 2015, 343.

［3］Hacking, I. *Historical Ontology*［M］. Cambridge: Harvard University Press, 2002.

［4］笛卡尔. 探求真理的指导原则［M］. 管震湖 译, 北京: 商务印书馆, 1991.

［5］莱布尼茨. 莱布尼茨逻辑学与语言哲学文集［M］. 段德智 编译, 北京: 商务印书馆, 2020, 258.

［6］欧几里得. 几何原本［M］. 张卜天 译, 北京: 商务印书馆, 2020, 31.

［7］莫里斯·克莱因. 数学简史: 确定性的消失［M］. 李宏魁 译, 北京: 中信出版社, 2019, 385.

［8］沈楠、徐飞. 虚空中的孤独旅者——伟大的数学家格罗滕迪克［J］. 自然辩证法通讯, 2017, 39（5）: 151–157.

［9］Grothendieck, A. *Récoltes et Semailles, I*［M］. Paris: Gallimard, 2022, 63.

［10］Voevodsky, V. 'How I Became Interested in Foundations of Mathematics'［R］. Singapore: Nanyang Technological University, 2014, 23.

［11］Fricker, M. *Epistemic Injustice: Power and the Ethics of Knowing*［M］. Oxford: Oxford University Press, 2007.

［12］Rittberg, C. J., Tanswell, F. S., Van Bendegem, J. P. 'Epistemic Injustice in Mathematics'［J］. *Synthese*, 2020, 197(9): 3875–3904.

［13］Manin, Y. *A Course in Mathematical Logic for Mathematicians*［M］. 2nd edition. New York: Springer

Verlag, 2010, 45.

[14] 加藤文元. 用数学的语言看宇宙：望月新一的IUT理论[M]. 周健 译, 北京：人民邮电出版社, 2024, 31.

[15] Shinichi Mochizuki. 'Report on the Current Situation Surrounding Inter-Universal Teichmüller Theory(IUT)'[EB/OL]. https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki/IUT-report-2025-10.pdf. 2025–10–28.

[16] Calegari, F. 'The ABC Conjecture Has (Still) Not Been Proved'[EB/OL]. https://www.galoisrepresentations.com/2017/12/17/the-abc-conjecture-has-still-not-been-proved. 2017–12–17.

[17] Avigad, J., Harrison, J. 'Formally Verified Mathematics'[J]. *Communications of the ACM*, 2014, 57(4): 66–75.

[18] Granville, A. 'Accepted Proofs: Objective Truth, or Culturally Robust?'[J]. *Annals of Mathematics and Philosophy*, 2023, 1(2): 25–90.

[19] 拉卡托斯. 数学、科学和认识论[M]. 林夏水 等译, 北京：商务印书馆, 2020.

[20] Lakatos, I. *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.

[21] Voevodsky, V. 'Univalent Foundations'[R]. Princeton: Institute for Advanced Study, 2014, 13.

[22] 王浩. 从数学到哲学[M]. 高坤、邢涛涛 译, 桂林：广西师范大学出版社, 2024, 332.

[23] Wiedijk, F. 'Formal Proof—Getting Started'[J]. *Notices of the AMS*, 2008, 55(11): 1408–1414.

[24] 杨帆. 作为数学革命的形式化证明[J]. 自然辩证法研究, 2024, 40（1）: 107–112.

[25] Macbeth, D. 'Formal Proofs in Mathematical Practice'[A], Sriraman, B. (Ed.) *Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice*[C], Cham: Springer, 2024, 2113–2135.

[26] Hersh, R. 'Prove-Once More and Again'[J]. *Philosophia Mathematica*, 1997, 5(3): 153–165.

[27] 康仕慧. 语境论的数学哲学：一种对数学本质和实在性研究的新范式[M]. 北京：科学出版社, 2016, 90.

[28] 阿蒂亚. 数学的统一性[M]. 大连：大连理工大学出版社, 2022, 155.

[责任编辑　王巍　谭笑]