·科学技术史·

戴德金理想理论对黎曼曲面的创造性发展

The Creative Contribution of Dedekind's Ideal Theory to the Development of Riemann Surfaces

杨强 /YANG Qiang　　王昌 /WANG Chang

（西北大学科学史高等研究院，陕西西安，710127）
(Institute for Advanced Study in History of Science, Northwest University, Xi'an, Shaanxi, 710127)

摘　要：十九世纪的数学重镇哥廷根，不仅见证了戴德金理想理论的诞生，还是黎曼曲面的滥觞。戴德金将理想理论与黎曼曲面的解析结构相结合，从而更加精确地刻画代数曲线的性质，并推动了黎曼曲面的代数化进程。这一结合不仅深化了对黎曼曲面的理解，也为代数几何的发展奠定了基础。本研究通过对原始文献的深入挖掘和细致分析，解读了戴德金理想理论和黎曼曲面的联系，探析了戴德金理想理论在黎曼曲面代数化进程中的贡献，阐明了戴德金的概念主义和逻辑主义为黎曼曲面的发展提供了坚实的理论基础和方法论指导，揭示了数学理论发展的内在联系及哲学意义。

关键词：理想理论　黎曼曲面　函数论　戴德金

Abstract: Göttingen, the mathematical town of the 19th century, witnessed not only the birth of Dedekind's ideal theory, but also the origin of Riemann surfaces. Dedekind combined ideal theory with the analytic structure of Riemann surfaces, thereby enabling a more precise characterization of the properties of algebraic curves and advancing the algebraization of Riemann surfaces. This integration not only deepened the understanding of Riemann surfaces but also laid the foundation for the development of algebraic geometry. This paper interprets the connection between Dedekind's ideal theory and Riemann surfaces through a close and meticulous analysis of the original literature, and examines its contribution to the algebraisation of Riemann surfaces. It is elucidated that Dedekind's conceptualism and logicism provided a solid theoretical foundation and methodological guidance for the development of Riemann surfaces, revealing the intrinsic connections and philosophical significance underlying the development of mathematical theory.

Key Words: Ideal theory; Riemann surface; Theory of function; Richard Dedekind

中图分类号：N09; O186.12　DOI: 10.15994/j.1000–0763.2026.04.016　CSTR: 32281.14.jdn.2026.04.016

一、问题的提出

作为代数学史上的一项里程碑式成就，戴德金（Richard Dedekind）的理想理论不仅深刻地影响着代数数论，抽象代数、同调代数等

项目基金：国家留学基金委资助项目（项目编号：202206970017）；国家自然科学基金青年项目“同伦论的历史研究”（项目编号：11501444）。

收稿日期：2024年5月14日；**返修日期：**2025年11月18日

作者简介：杨　强（1995–）男，甘肃兰州人，西北大学科学史高等研究院博士研究生，研究方向为近现代数学史。Email: Y114211143@163.com

王　昌（1980–）男，陕西泾阳人，西北大学科学史高等研究院教授，研究方向为近现代数学史。Email: heart_cw@126.com

学科的发展，而且在代数几何，尤其是在代数曲线上函数域的代数性质研究中，产生了深远的影响，进而推动了黎曼曲面的代数化进程。同时，黎曼曲面作为黎曼在数学领域最重要和最具独特性的创造之一，展现了他对几何和函数的透彻理解。在研究黎曼曲面时，黎曼将单值函数的某些定理推广到多值函数，从而促进了柯西积分定理等数学定理的发展。[1]-[3]

戴德金被誉为黎曼传统最杰出的代表之一，[4]他对黎曼理论和传统的贡献不仅局限于他的独创性思维，更在于他对数学发展的持续影响和推动。从算术的角度来看，戴德金理想理论对黎曼函数论的重构不仅是戴德金方法和代数概念高效运用的一个典范，也突显了数和算数与人类思维之间的固有联系。[5]同时，在数学哲学视阈下，戴德金对演绎科学的看法是以定义为基础，并在构建算术时所使用的推理规则都是纯粹的逻辑主义。[6]，[7]

这些学术成果为我们深入研究戴德金理想理论对黎曼理论的贡献提供了有益的视角，丰富了我们对戴德金数学思想的理解。然而，数学史研究的意义不仅在于对 数学发展历史进行细致的梳理，更在于深入探索数学思想的本质和思维方式及其内在联系。[8]-[11]

鉴于此，本文旨在探讨戴德金理想理论对黎曼函数理论和黎曼曲面的历史贡献，以及戴德金的数学哲学观是如何影响黎曼曲面的发展？通过对戴德金原始文献的分析，阐发了戴德金理想理论在黎曼函数理论发展历程中的作用及其与黎曼曲面的关联，考察了戴德金抽象数学结构背后的哲学内涵对黎曼工作的推进，明确了戴德金理想理论对黎曼曲面的贡献及哲学意义。

二、戴德金的理想理论与黎曼曲面基础

数学的发展总是呈现出螺旋上升波浪式前进的趋势，正如在证明费马定理的历程中，整数的概念得到了极大地扩展，如高斯的复整数，库默尔（Eduard Kummer）的理想数和戴德金的理想理论等。尽管这些理论未能直接解决费马定理，但却为代数数论提供了重要的分析工具，开辟了全新的研究领域。这一过程彰显了数学的引人之处，即在解决难题的过程中不断创新，推动新的数学理论和方法的发展。

1. 戴德金研究理想理论的开创性工作

1871年，在狄利克雷（Lejeune Dirichlet）《数论讲义II》的附录十中，戴德金首次引入理想的概念：

> 如果一个包含在o中的无限多个数的集合a满足以下两个条件，那么这个集合被称为理想：
>
> （1）a中任意两个数的和与差仍是a中的一个数。
>
> （2）a中的任意一个数与o中的一个数的乘积仍是a中的一个数。（[12]，p.452）

由此，戴德金定义的理想是一个给定数域中的代数数集合，它在与数域中的代数整数相加、减和乘时是封闭的。（[13]，p.201）对于戴德金而言，库默尔在分圆数域中对理想数的讨论促使戴德金发展了完全属于他自己的理想理论。正如他自己阐述的那样：

> 最后，通过创造理想数走上了一条新的道路，这不仅导致了一种非常方便的表达方式，而且还加深了对代数数的真实且本质的洞察。（[12]，p.424）

戴德金通过对新思想的介绍和新概念的引入，将理想理论置于更高的观点之上，因为戴德金能够证明，理想可以唯一地分解为有限多个素理想的乘积。此外，他引述域的概念，将其作为高等代数和与之相关数论部分的基础。进而，戴德金在限域Ω中扩展了理想的更一般理论，他总结道：

> 通过前面的定理，有限域Ω中的理想理论得到了极大的简化。因为它本身只是基本定理的简化形式，即每一个理想都可以通过与一个理想的乘积而转化为主理想。（[14]，p.282）

1876年，戴德金用法语重述了他的理想理论，用以研究数论，并讨论了高斯的复整数理论。戴德金认为：

> 数学的定义诞生最初也必然是以有限的形式出现的，只有通过进一步的发展，才会出现这些定义的一般化。（[15]，p.430）

因此，戴德金理想理论的诞生可以视为整数数概念一般化的具体表现。然而，理想理论的进一步发展和完善也验证了数学定义一般化的过程需要不断的探索和创新。戴德金理想理论的引入，不仅为代数数论和代数几何提供了新的研究工具和思路，也为近世代数的研究开辟了新的发展途径。（[16]，p.1）

2. 黎曼曲面的诞生

黎曼在几何学方面的开创性研究主要受到了高斯等前辈学者的影响，特别是德国物理学家威廉·韦伯(Wilhelm Weber)和利斯廷(Johann Benedict Listing)。1849年，黎曼重返哥廷根，担任了长达18个月的威廉·韦伯的助理。同时，当时的利斯廷被任命为哥廷根大学的物理教授，黎曼在他那里深受启发，学习了拓扑学的重要思想。因此，黎曼不仅具有强大的物理学背景，还在拓扑学领域获取了丰富的知识。

两年后，黎曼在高斯的指导下，完成了他的博士毕业论文《单复变函数一般理论基础》。高斯的《天体运动理论》作为黎曼论文唯一的参考文献，并为其提供了研究基础。黎曼的基本思想是，解析函数在任何曲面的情形都可以简化为对单连通域上函数的研究，并确定该函数在切点处的跳跃性。为此，他进行了深入但本质上是拓扑学的研究，并取得了关于黎曼曲面的第一个结果。（[1]，pp.14–15)对黎曼而言，他引入的黎曼曲面是一个抽象概念，是指所有自然存在的光滑二维曲面都可以描述为黎曼曲面。黎曼几何的开篇完整地体现了智力任务与计算任务之间的新分配，其风格完全是哲学的，他将最深刻的数学直觉与最新颖、最不成熟的概念和方法融为一体。（[4]，p.233）

1854年6月10日，黎曼发表演讲《论几何学基础之假设》，此讲义主要包括两个部分，第一部分的重点是关于曲率张量的定义，这为爱因斯坦的广义相对论提供了数学基础。第二部分提出了关于几何学与我们现实世界关系这一深刻问题。这是一篇具有浓厚哲学色彩的数学文章，为微分几何学和非欧几何学带来了巨大突破，并深化了人们对空间观念的理解。（[2]，p.10）

黎曼将代数函数覆盖平面$\mathbb{C}$或球面$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$视为曲面，将柯西在$\mathbb{C}$上的积分理论推广到任意代数曲线上的积分，即对于平面$\mathbb{C}$而言，他通过定义了分歧覆盖曲面，使得$\sqrt{z}$等多值函数变成了单值函数，亏格p则具有更简单的拓扑含义。因此，黎曼曲面本质上是多值函数的单值化曲面。黎曼的几何思想深邃超前，并且深深地带有19世纪几何的印记。而物理和数学的交替是黎曼的研究特色，相应的几何思想包含了对物理空间的哲学思考。（[3]，p.74）

三、戴德金理想理论对黎曼曲面的历史贡献

戴德金通过引入理想理论和代数数论的方法奠定代数几何的基础，并对一般代数数域和一般函数域进行了深刻地类比。正如诺思科特（Douglas Northcott）说的那样：

> 理想理论不仅具有逻辑结构的普遍性和纯粹性，这是近年来许多工作的典型特点，而且在很大程度上促进了数学的一个古老分支的发展，即代数几何。（[17]，p.VII）

1. 代数函数域中理想理论的建立

戴德金在编辑黎曼全集的工作时，得到了海因里希·韦伯（Heinrich Weber）的肯定并在1876年的信中赞扬道：

> 作为唯一的编辑，您确实没有必要感到遗憾，因为您不仅完成了这部著作的主要工作，而且还通过您对黎曼创作的全面掌握，指导了整部著作的创作，世人都会说：这本书

①威廉·韦伯（Wilhelm Weber），德国物理学家，在电学方面做出了卓越贡献。为了不产生歧义，本文所述的“韦伯”均指德国数学家海因里希· 韦伯（Heinrich Weber）。

②利斯廷（Johann Benedict Listing），德国物理学家和数学家，是最早撰写拓扑学著作的数学家之一。

写得很好。（[15]，p.483）

韦伯认为戴德金对黎曼的工作有着深刻地理解。因此，作为理想理论的一个应用，戴德金于1879年1月18日，将他关于代数函数理论的研究成果寄给了韦伯，韦伯对此给予了戴德金热情地回复：

> 虽然我还没有完全读完你的上一封信，但我今天已经想向你表示感谢，并告诉你我对它非常感兴趣。它对阿贝尔函数理论也大有裨益。也许我们能通过这种方式，成功地为阿贝尔函数获得一个有用的正则表达式。今天我还不能写更多的细节，因为我需要先更精确地研究这个问题。无论如何，我也希望能在这次会议上首次深入探讨您的理想理论。（[14]，p.220）

关于代数函数域中理想理论的第一封通信可以表明，这一观点最初来自戴德金。更关键的是，在戴德金看来，黎曼对函数论的贡献在这方面尤为新颖，他称赞黎曼的方法使我们可以在没有特定表示或计算方法的情况下考虑函数问题。（[18]，p.275）因此，戴德金和韦伯于1882年发表论文《单变量代数函数理论》，并在序言中描述道：

> 下面的研究旨在从简单、严谨和完全一般的角度证实变量代数函数理论，这是黎曼创造的主要成果之一。（[19]，p.181）

戴德金和韦伯的研究目标是希望通过理想理论为黎曼的代数函数理论提供简单且严谨的证明。因此，戴德金在简化黎曼曲面之前，首先通过大量的篇幅来介绍他是如何将一般代数数域中的理想理论转移到一般代数函数域，并阐述了其重要性和合理性；其次建立了理想理论与黎曼曲面之间的联系；最后给出了黎曼–罗赫（Gustav Roch）定理的纯代数证明。

《单变量代数函数理论》分为两个部分，戴德金在文章的一开始就类比一般代数域的概念，引入了代数函数域的概念，并将代数数域中的代数整数、理想等概念平行推广到代数函数域中。因此，戴德金讨论的代数数域可以看作是有理数域添加代数方程根的扩张，而代数函数域则是有理函数域的扩张。他也多次强调理想理论在一般代数数域中的成功发展以及在数论中的广泛应用，于是他写道：

> 对于一般情况，类似于刚才提到的最一般代数数的情况是有理数的情况，在数论中应用的最成功的方法，从库默尔的理想数的创造，并能够转移到函数理论，指向正确的方向。（[19]，p.181）

进而，戴德金解释了为什么在函数域上继续使用理想：

> 虽然目前的工作绝不涉及“理想”函数，但所有运算都是在真正存在的函数域上进行的，因此保留“理想”这一在数论中已被普遍使用的名称似乎是合适的。…… 有了这些理想，在对乘法进行适当解释后，就可以按照与有理函数相同的规则进行计算。（[19]，p.182）

对于戴德金和韦伯而言，他们并未对域和理想本身的性质产生兴趣，而是将它们视为数与函数的基本概念和特定的理论工具。为了给积分代数函数理想的研究铺平道路，戴德金和韦伯引入了模的概念，即在多项式的加、减、乘法运算下封闭的代数函数集合。（[19]，p.195）在明确了模概念之后，他们重点关注了模的除法和加法，并将两个模的乘积定义为模中所有有限和的集合，且模的乘法满足交换律。

对于模的中心问题之一，考虑其同余类是必要的。因此，在《单变量代数函数理论》第五节中，戴德金和韦伯定义了两个函数在模意义下的同余关系。（[19]，p.199）这种同余关系本质上是一种等价关系，它将所有在模下具有相同值的函数归为一类。通过这种方式，他们能够在模算数中研究函数性质，而不再需要关注函数的具体形式。

不难证明，在代数数论中，同余类的数量通常是有限的，然而在代数函数论中，同余类却构成了一个向量空间。因此，在戴德金和韦伯的观点下，每个理想同时也是一个模，所有为模定义的术语和符号都可以应用于理想。（[19]，p.207）此外，关于函数域中理想的乘

法和除法，同样来源于模的乘法和除法定义。

因此，在整个研究过程中，戴德金坚持要避免的一个错误，把仅仅源于特定表象的属性归于数学概念。他自称从研究高斯和黎曼的著作中吸取了这一教训，并认为黎曼在函数理论研究中取得的重要成果正是对这一原则的成功应用。（[20]，p.67）因为在戴德金看来，将一般代数数域中的理想理论转移到函数理论中，是完全合理且正确的道路，并为其提供了新的工具和基础。

2. 黎曼曲面的新定义

函数域与黎曼曲面的相关问题源于黎曼发现黎曼曲面上的亚纯函数是代数的，也就是多项式方程的解。因此，在给定的黎曼曲面上，所有亚纯函数的集合构成了一个域，因为它在加、减、乘和除法（非零函数）运算下是封闭的。然而戴德金强调他在数论方面所做的努力，不是基于任意的表示或表达，而是基于简单的基础概念。尽管有冗长的技术铺垫，但黎曼曲面仍然是理论的核心。（[5]，p.49）戴德金和韦伯主张通过理想理论定义黎曼曲上点的概念，于是他们写道：

> 如果我们想预先假定黎曼曲面的概念，特别是黎曼曲面上点的概念，再加上基于代数函数连续性的观点，那么理想理论本身就会变得异常简化。相反，在我们的工作中，理想理论是在漫长的时间中建立起来的，并由此获得了黎曼曲面上点的完全精确和严格的定义，这也可以作为研究连续性和与之相关问题的基础。（[19]，p.183）

在戴德金和韦伯的研究中，他们首先强调了黎曼曲面上点的重要性，并在整个研究中，为了服从某些计算规则，将无穷大看作是一个确定的数（常数）∞。这种将无穷大视为一个确定的值在函数论中是常见且实用的做法。例如，黎曼通过这种方式把表示代数函数的曲面视为闭合曲面。（[21]，p.94）为了满足运算中的要求，戴德金和韦伯讨论了函数值与点的联系。他们将域中的所有单个元素替换成确定的数时，这些数在某一点处的值可以通过具体的法则进行计算。具体来说：如果一个元素是常数，那么它在任何点处的值等于该常数本身；对于非常数的情形，戴德金和韦伯通过四则运算定义了函数在不同情况下的取值方式。这种定值赋值将于空间中的任意点 $\mathfrak{P}$ 相关联，并将该点处的函数值称为该点的值。（[19]，p.236）

在获得点 $\mathfrak{P}$ 的相关性质后，他们给出了关于理想与点之间关系的定理：

> 如果 z 是一个在点P处的有限变量，那么所有在点 $\mathfrak{P}$ 处为零的 z 的积分代数函数π的集合 $\mathfrak{p}$ 就是 z 的素理想。我们称点 $\mathfrak{P}$ 生成这个素理想 $\mathfrak{p}$。（[19]，p.237）

在戴德金和韦伯的工作中，他们摒弃了黎曼曲面的定义中关于几何，无穷小和拓扑方面，从而把注意力集中在点与点之间的代数关系上，这种联系与素理想的定义有关，正如韦伯在1879年12月18日的信中指出的那样：

> 为了得到令人满意的点的定义，最好的办法是回到理想理论的原始基础，在那里，只要可能，我们就不谈论点，而只谈论素理想。（[14]，p.265）

通过这种方式得到的黎曼曲面只是点的集合，并不具备任何结构。因此，曲面本身并未被完全描述。所以黎曼曲面的核心是定义多边形①的概念，并通过域的不变性质建立黎曼曲面，戴德金在给韦伯的信中强调道：

> 我认为，整个理论必须从一开始就建立在对不变概念的探索之上，而在这一过程中，我总是会再次回到黎曼。（[21]，p.12）

戴德金指出整个理论应该回到函数的点、乘法、零点和奇点等特征上，将不止一次包含同一个点的复合定义了多边形，称多边形的点数为阶数，而阶数为n的多边形简称为n-形。进而，戴德金和韦得到：在同一固定点为零的

①戴德金和韦伯的原文中所使用的是德语“Polygone（多边形）”，也就是我们现在所称的“除子”，特别地，在他们的文章中只考虑正除子。为了体现戴德金想要表达的几何性质，本文将“Polygone”直译为“多边形”。

积分代数函数系统的概念与理想概念完全一致。因此他们阐述了多边形与理想的一一对应关系，并指出：

> 多边形的可分性规律与整数和理想的可分性规律完全一致，点扮演着素因子的角色。（[19]，p.241）

由此，戴德金和韦伯通过多边形的乘积定义了具有结构的黎曼曲面，并考虑了曲面在z-平面的分布，将具有斜切点的黎曼曲面称为绝对黎曼曲面。因此，通过这种方式定义的黎曼曲面是域的不变性质。此外，他们还定义了分歧理想，因为分歧理论是黎曼曲面中戴德金和韦伯亏格定义的核心要素之一。

有了以上概念和结论的铺垫，戴德金和韦伯讨论了多边形的向量空及与之相关的维数。然而最核心的工作是通过他们新的理论框架重述黎曼理论的基本概念，如：亏格、双点数和微分等，并给出了阿贝尔（Niels Abel）定理和黎曼–罗赫定理的新证明。他们定义的黎曼曲面相当于脱离了任何空间的考虑，完全依赖函数之间的理性关系，并以这种方式发展他们的理论，即在定义中不需要拓扑概念，最终应从引入的概念中产生。（[5]，p.63）

戴德金和韦伯提出对黎曼所有代数定理进行纯代数证明，然而，正是他们卓越的独创性使其引入的一系列观点成为现代代数几何的基础思想。（[22]，p.29）通过理想理论在黎曼曲面上的应用，可以更深入地理解曲面的几何结构和代数性质，促进了黎曼曲面的进一步发展。

四、戴德金的哲学观与黎曼曲面之关联

随着数学的变革，它又会增加新的对象、方法、分支学科和实践。当然，数学哲学也会因此而发生变革，但这并不意味着需要创造一种新的数学哲学来解释这种变化，至少如果这被解释为需要我们更新对本体论、方法论、语义、逻辑学等观点。（[23]，p.215）戴德金理想理论对于黎曼代数函数理论和黎曼曲面而言，不仅仅是一种数学上的技术手段，更蕴含着深刻的哲学思考。通过数学对象的代数化和几何化，我们不仅可以理解数学内部的结构和规律，还可以深入探讨数学与现实世界的关系以及数学研究的本质。

十九世纪初，德国知识界广泛讨论了康德主义和德国唯心主义观点，同时探讨了直觉在数学中的作用。在这一时期，高斯和黎曼等数学家对哲学产生了浓厚的兴趣。因此，戴德金在哥廷根受到了狄利克雷和黎曼的影响，因为他们都偏爱于概念性的定义，（[24]，p.78）这种概念性思维方式对戴德金来说具有至关重要的意义。同时，黎曼和戴德金也全心全意地接受了这一原则，他们还赋予了这一原则抽象的色彩，可以说是一种哲学倾向。（[25]，pp.60–61）

诚然，戴德金作为黎曼全集的编辑者，也更加青睐黎曼的概念性数学。粗略地说，“概念性方法”指的是19世纪下半叶一些数学家倾向于尝试用概念取代数学中的明确表示形式（例如使用未定变量或级数）或计算，以避免（或更确切地说是隐藏）冗长的计算过程。（[4]，p.33）在黎曼的几部著作中，尤其是在那些现在被称为微分几何学的著作中，他明确指出了探索新的“概念可能性”是多么富有成效，例如各种非欧几里得几何图形。（[26]，p.392）

关于概念性方法的观点，戴德金于1854年在霍克（Karl Hoeck）教授家中与高斯，韦伯等人的讨论中，就已经阐述了他对于概念的深刻见解：

> 引入这样一个概念，作为系统形成的动机，在某种程度上是对科学的内在本质提出的一种假设。（[15]，p.249）

在戴德金看来，基于基础概念的发展很可能是对科学内在本质、结构或规律的一种猜想和理解。于是他继续论述关于科学内在的必然性：

> 每一门科学的进一步发展总是会对人们试图理解其有机体的体系产生重新形成的影响，这不仅是一个历史事实，而且也是基于一种内在的必然性。（[15]，p.430）

1895年，戴德金在《论理想理论的合理性》

一文中对数学的方法进行阐述时，强调了黎曼函数论内在与外在属性的联系，他说到：

> 如果从最一般的意义上理解这最后几个字，我们会发现其中表达了一种伟大的科学思想：内在与外在的决定性对比，这种对比也出现在几乎所有数学领域。我们只需想想函数论，想想黎曼通过特征内在属性给函数下的定义，从这些属性中必然会产生外在的表示形式。但在更为有限和简单的理想理论领域中，这两个方向亦是正确的。（[27]，p.110）

因此，戴德金对科学发展的预见不仅仅基于外在历史事实，而且关注其内在属性的必然性。他将这种观点应用于黎曼的函数论，并认为黎曼通过内在属性的性质定义函数，从而产生外在的表示形式。戴德金进一步强调，在更为有限和简单的理想理论中，这种内外联系的对比同样适用。因为在逻辑的基础范畴内，戴德金认为对象、集合和函数的概念是人类思维的基础。所以戴德金在给利普希茨（Rudolf Lipschitz）的信中写道：

> 我在数论方面所做的努力，不是以任意的表示或表达式为基础，而是以简单的基本概念为基础，尽管这种比较听起来可能有点冠冕堂皇，然而在数论方面取得类似于黎曼在函数论方面所取得的成就。在这方面，我不得不顺便说一句，例如：大多数作者甚至在最新的椭圆函数著作中都没有在很大程度上坚持黎曼的原则，他们几乎总是不必要地引入本应是理论的结果而非工具的表示形式，从而破坏了理论的纯粹性。（[15]，pp.468–469）

戴德金详细阐述了数扩展的过程中需要引入新的运算以适应于新的数类，通过对加法和乘法的定义以及指数和三角函数的进一步叙述，说明了数学中从只涉及有限域的概念到一般概念是一个渐进的过程。然而，需要强调的是，在这些例子中，有限域的最基本概念始终保持不变。这不仅是戴德金哲学观的具体体现，也是黎曼对于基础概念偏爱的进一步发展。同时，戴德金的逻辑主义与其理想理论是同时发展起来的，于是戴德金在“数是什么，数应当是什么？”一文中宣称自己是逻辑主义者：

> 我把算术（代数、分析）仅仅称为逻辑学的一部分，就已经表明我认为数的概念完全独立于空间和时间的观念或概念，我更认为它是纯粹思维规律的直接流露。（[28]，p.1）

根据戴德金的观点，将代数和分析结合起来的算术视为逻辑学的一部分，所以纯数学应该建立在数概念的基础上，这强调了数学中逻辑推理和思维过程的关键性和普遍性。在戴德金理想理论下，逻辑主义为黎曼曲面代数化的过程中提供了为严密的逻辑分析和概念的清晰定义。因此，从戴德金数学哲学观的整体发展来看，概念主义和逻辑主义与黎曼曲面的发展并不是相互割裂和相互否定的，而是从属于更广泛的数学理论发展和几何代数化的进程之中。

结　语

戴德金通过研究理想和多边形等基本数学对象的可除性，对黎曼函数理论和黎曼曲面进行概念性的重构，并进一步证明了通过多边形的乘积定义的黎曼曲面是域的不变性质。此外，戴德金为了给积分代数函数理想的研究铺平道路，引入了模的概念，讨论了代数函数域中模的同余类以及模与理想的关系。这一系列的工作不仅展示了戴德金的代数概念在黎曼代数函数理论和黎曼曲面中的成功应用，还明确了代数方法在处理几何和分析时的广泛适用性，为复变函数与代数几何的交叉研究奠定了基础。

戴德金的理想理论对黎曼曲面的贡献不仅体现了代数结构和几何性质之间的关联性，而且从哲学的视阈下揭示了数学的本质。他的逻辑主义和概念主义为黎曼的理论提供了严谨理论框架，并使其能够更深入地阐发和延展。一方面，戴德金的理想理论强调了数学的基础应该建立在是逻辑推理和公理系统之上。由于数学理论的严密性与可靠性是理论研究得以深入开展的前提，戴德金运用理想理论为黎曼函数论和黎曼曲面的研究提供了基础，使得数学家能够更加精确地分析曲面的几何与代数特性。另一方面，戴德金的理想理论反映了数学的普

适性和抽象性，即数学不仅仅关注于具体的对象和形式，还应注重提炼普遍适用的原则和规律。这种抽象思想的提升，使黎曼曲面的研究得以超越单一领域的限制，从而推动了理想理论和黎曼曲面的深化与演进，也为后来抽象代数、同调代数与代数几何的研究奠定了基础。

［参考文献］

[1] Monastyrsky, M. I. *Riemann, Topology, and Physics*[M]. New York: Springer Science & Business Media, 2008.

[2] 刘建新、曲安京. 黎曼论几何学基础之假设[J]. 科学技术哲学研究, 2018, 35（5）: 89–93.

[3] 邓明立、阎晨光. 黎曼的几何思想萌芽[J]. 自然科学史研究, 2006, 25（1）: 66–75.

[4] Sinaceur, M. A., Dedekind, R. 'Dedekind et le Programme de Riemann'[J]. *Revue d'histoire des Sciences*, 1990, 43(2-3): 211–296.

[5] Haffner, E. 'Strategical Use(s) of Arithmetic in Richard Dedekind and Heinrich Weber's Theorie der Algebraischen Funktionen einer Veränderlichen'[J]. *Historia Mathematica*, 2017, 44(1): 31–69.

[6] Klev, A. M. 'Dedekind's Logicism'[J]. *Philosophia Mathematica*, 2017, 25(3): 341–368.

[7] Klev, A. M. 'Dedekind and Hilbert on the Foundations of the Deductive Sciences'[J]. *Review of Symbolic Logic*, 2011, 4(4): 645–681.

[8] 曲安京. 故事与问题: 学术研究的困境是怎样产生的[J]. 自然辩证法通讯, 2021, 43（6）: 1–7.

[9] 李亚亚、王昌. 函数连续性概念的历史: 从欧拉到勒贝格[J]. 自然辩证法通讯, 2024, 46（2）: 61–67.

[10] 杨强、王昌. 戴德金理想理论的嬗变及其哲学意蕴[J]. 自然辩证法研究, 2025, 41（1）: 125–131; 138.

[11] 季理真、王昌. 庞加莱拓扑学思想动因探源[J]. 自然科学史研究, 2023, 42（1）: 113–123.

[12] Dirichlet, P. G. L. *Vorlesungen über Zahlentheorie*[M]. 2nd edited by Richard Dedekind, Braun-schweig, 1871.

[13] Gray, J. *A History of Abstract Algebra: From Algebraic Equations Modern Algebra*[M]. Switzerland: Springer, 2018, 201.

[14] Scheel, K. *Der Briefwechsel Richard Dedekind–Heinrich Weber*[M]. Berlin: De Gruyter Oldenbourg, 2014.

[15] Dedekind, R. *Gesammelte Mathematische Werke*[M]. 3rd edited by Emmy Noether and Öystein Ore, Braunschweig, 1932.

[16] Devillanova, G., Bisci, G. M. 'The Fabulous Destiny of Richard Dedekind'[J]. *Atti Della Accademia Peloritana dei Pericolanti Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, 2021, 99(S1): 1–28.

[17] Northcott, D. G. *Ideal Theory*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1953.

[18] Avigad, J., Morris, R. 'The Concept of "Character" in Dirichlet's Theorem on Primes in an Arithmetic Progression'[J]. *Archive for History of Exact Sciences*, 2014, 68: 265–326.

[19] Dedekind, R., Weber, H. 'Theorie der Algebraischen Functionen einer Veränderlichen'[J]. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1882, 92: 181–290.

[20] Corry, L. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*[M]. New York: Springer Science & Business Media, 2003, 81.

[21] Stillwell, J. *Theory of Algebraic Functions of One Variable*[M]. Translation of Dedekind and Weber, History of Mathematics and American Mathematical Society, Providence, 2012.

[22] Dieudonné, J. *History of Algebraic Geometry: An Outline of the History and Development of Algebraic Geometry*[M]. Menterey: Wadsworth Advanced Books & Software, 1985.

[23] Nicolas, F. 'Conceptual and Computational Mathematics'[J]. *Philosophia Mathematica*, 2019, 27(2): 199–218.

[24] Goldstein, C., Schappacher, N., Schwermer, J. (Eds.) *The Shaping of Arithmetic After CF Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*[M]. Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007, 78–86.

[25] Ferreirós, J., Reck, E. H. 'Dedekind's Mathematical Structuralism: From Galois Theory to Numbers, Sets, and Functions'[J]. *The Prehistory of Mathematical Structuralism*, 2020, 59–87.

[26] Reck, E. H. 'Dedekind's Structuralism: An Interpretation and Partial Defense'[J]. *Synthese*, 2003, 137(3): 369–419.

[27] Dedekind, R. 'Über die Begründung der Idealtheorie'[J]. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, 1895, 1: 106–113.

[28] Dedekind, R. *Was sind und was sollen die Zahlen?*[M]. Braunschweig, 1888.

［责任编辑　王大明　柯遵科］