第 48 卷 第 2 期（总 330 期）　　自然辩证法通讯　　Vol.48, No.2 (Serial No.330)
2026 年 2 月　　Journal of Dialectics of Nature　　February 2025

跨文明视域下三角形三边求积的比较研究

A Cross-Civilizational Comparative Study of Methods for Determining the Area of a Triangle from Its Three Sides

田春芝 /TIAN Chunzhi[1]　　应成霞 /YING Chengxia[2]

（1. 上海市科学学研究所，上海，200031；2. 上海交通大学科学史与科学文化研究院，上海，200240）
(1. Shanghai Institute for Science of Science, Shanghai, 200031
2. School of History and Culture of Science, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, 200240)

摘　要：已知三角形三边求面积（简称“三边求积”）的方法和证明，最早出现于希腊海伦的《量度》和《经纬仪》，中国、印度、阿拉伯、西欧亦有类似或相同的公式。本文在跨文明视域下，从命题形式、证明过程、知识溯源和文明交流四个层面对“三边求积”展开研究，并提出“三边求积”的三种文化形态：不同文明，不同方法——希腊的几何法和算术法，中国的勾股法（“和较法”），阿拉伯的代数法与勾股法结合及几何法；同一文明，不同方法——希腊的海伦和波埃休斯、阿拉伯的花拉子米与巴努·穆萨使用不同方法；不同文明，同一方法——印度与中国、印度和希腊的相同方法。本文认为：不同文明的不同方法体现了数学文化的丰富性、差异性和自主性；不同文明的同一方法说明了不同文明之间可能存在的传播和交流；同一文明的不同方法展示了数学家们思想的独立性。此外，明清文献对“海伦公式”的记载和改造，呈现了西方数学知识在中国传播和融合过程中所经历的本土化过程。

关键词：跨文明　三边求积　希腊　阿拉伯　西欧

Abstract: The method and proof of finding the area of a triangle from its three sides (hereinafter referred to as “tripartite quadrature”) first appeared in the *Metrica* and *Dioptra* of Heron in Greece. Similar or identical formulas later emerged in China, India, the Arab world and Western Europe. From the perspective of cross civilizations, this paper studies the tripartite quadrature from four aspects: propositional form, proof process, knowledge traceability and civilizational exchange, and puts forward three cultural forms of its development: different civilizations employing different methods—the Greek arithmetical and geometrical methods, the Chinese method of *Gougu*, and the algebraic and geometric methods in the Arab tradition; within the same civilization, different methods—Heron and Boethius in Greece, as well as Al-Khwarizmi and Banu Musa in the Arab word, used different methods; different civilizations sharing the same methods—India and China, or China and Western Europe, where analogous procedures can be identified. This paper argues that the different methods across civilizations reflect the richness, diversity and autonomy of of mathematical cultures; the same method across civilizations illustrates possible transmission and communication between different civilizations; the different methods within a single civilization demonstrate the independence of the minds of mathematicians. In addition, Ming- and Qing-dynasty records and adaptations of “Heron’s formula” show the localization of western mathematical knowledge in the process of dissemination and integration in China.

Key Words: Cross civilizations; Tripartite quadrature; Greece; Arab; Western Europe

中图分类号 : G633.6; N09　DOI: 10.15994/j.1000−0763.2026.02.008　CSTR: 32281.14.jdn.2026.02.008

基金项目：国家社会科学基金一般项目“汉译《几何原本》的版本整理与翻译研究”（项目编号：21BZS021）。
收稿日期：2023 年 12 月 13 日；**返修日期：**2025 年 11 月 18 日
作者简介：田春芝（1990–）女，山东济南人，上海市科学学研究所助理研究员，研究方向为科学文化、科学传播。Email: tcz@siss.sh.cn
应成霞（1998–）女，浙江慈溪人，上海交通大学科学史与科学文化研究院博士研究生，研究方向为数学史。Email: yingcx@sjtu.edu.cn

古老的丝绸之路，不仅是一条商贸之道，“更重要的是使东西方在科学技术发明，宗教哲学与文化艺术等方面发生了广泛的接触、碰撞，丝绸之路已成为东西方文化交汇的纽带。”[1]在数学方面，沿丝绸之路数学知识的传播与交流，更促进了沿线各文明数学文化的融合。例如，“海伦公式”出现于希腊海伦的《量度》（*Metrica*）和《经纬仪》（*Dioptra*）之后，阿拉伯、西欧都出现类似或相同的公式，中国、印度也创造了具有本国文明特色的公式。对于“海伦公式”，前人更多关注首创者是海伦还是阿基米德的问题，以及阿拉伯和西欧文献对海伦公式的记载；对秦九韶“三斜求积公式”，前辈学者在“古证复原”思想的指导下对其证明过程作出推导；对婆罗摩笈多公式，学者们指出其适用的条件。本文在前人研究的基础上，从跨文明视域下，旨在将不同文明中“三边求积”的命题形式和解决方法进行历史梳理和方法重构，进而提出：不同文明如何记载此类问题？不同文明为何采取同一方法？同一文明为何出现了不同解法？不同文明之间是否存在交流？中国学者面对异质文化如何进行本土化改造和应用？对这些问题的探讨有助于探析古代文明数学知识的独立性和数学家们的创造性，明晰数学知识的传播路径，进而阐明不同文明之间数学知识交流互鉴的历史意义。

一、对三角形认识的东西方两种传统

1. 东方传统

巴比伦人有计算各种图形面积的公式，如用S=ah或S=1/2ah计算矩形和三角形面积，但未明确a和h是否垂直，在这些公式中，有今天所说的系数表——表明不同几何图形数学关系的常数表。比如，对三角形给出的系数是（0; 30）（1/2，巴比伦采用60进制），代表三角形的面积等于高和长乘积的一半。[2]

埃及人记载了有关三角形面积计算的近似公式，《莱茵德纸草书》第51题：

> 三角形田，腰长10赫（khet），底边4赫，问：面积是多少？
>
> 答数：20塞太（setat）。
>
> 解法：腰长、底边乘积的一半。[3]

中国对三角形面积计算的公式首现于《九章算术》（简称《九章》）“方田章”第25和26题：

> （25）今有圭田广十二步，正从二十一步。问为田几何？
>
> （26）又有圭田广五步、二分步之一，从八步、三分步之二。问为田几何？
>
> 术曰：半广以乘正从。
>
> 半广者，以盈补虚为直田也。亦可半正从以乘广。按半广乘从，以取中平之数。故广从相乘为积步。亩法除之，即得也。[4]

《九章》原文“半广以乘正从”，即底宽的一半乘以高，刘徽注采用以盈补虚的方法给出证明，同时列举底宽乘以高的一半的另一种方法，原理如前。

印度有关三角形面积的公式记载于阿耶波多（Āryabhaṭa, 476–550）的《阿耶波多历算书》（*Āryabhaṭīya*）以及婆什迦罗一世（Bhāskara, 7世纪初）的《<阿耶波多历算书>注释》（*Āryabhaṭīyabhāṣya*，简称《注释》）中，《注释》2.6的前半偈：

> 三角形面积的大小是底边的一半与垂线的乘积。（[2]，p.418）

印度和中国与埃及和巴比伦的不同之处在于都明确指出高与底垂直。可以看出，东方传统求三角形面积是基于生活的实际需要，而西方传统的早期数学文献并没有关于图形面积的计算。

2. 西方传统

这里的西方传统，专指希腊传统，欧几里得《原本》（*Elements*）中没有三角形面积公式的记载，卷I命题41指出平行四边形和三角形的关系，但未明确“面积”一词：

> 如果一个平行四边形和一个三角形同底且在两条平行线之间，则平行四边形是三角形的两倍。（[5]，p.35）

《原本》（主要是卷I）关注三角形的边、角和其他图形的关系以及如何做出满足特定条件的图形等，不包括测量，更没有面积计算。从东西方对三角形认识的不同传统中，可以看出东方倾向实用几何，而以希腊为主的西方文

明尤为关注理论几何。

从阿基米德（Archimedes，前287–前212）开始，希腊数学呈现实用几何的转向。阿基米德不再拘泥于欧几里得的几何传统，而是注重数值计算，他的著作中给出了三角形和圆面积计算公式与证明。可以这样说，“若要拿一个人的工作成就来代表亚历山大时期的数学特性，谁也不能比阿基米德更合适的了”。[6]

阿基米德之后，实用数学的代表人物是海伦（Heron，或Hero，约出生于公元62年），他是古希腊活跃于亚历山大的数学家、测量学家和机械工程师。在论证中，他使用某些经验性的近似公式，尤其注重数学的实际应用，其《量度》被认为是实用测量的代表作，旨在使读者学会测量各种图形的面积和体积。

二、不同文明中“三边求积”的不同方法

1. 希腊——算术法和几何法

（1）海伦直接法：海伦公式

希思（Thomas L. Heath, 1861–1940）指出，阿拉伯数学家比鲁尼（Abū’l Raihān al-Bīrunī, 973–1050）认为海伦公式的最早提出者是阿基米德。[7] 卡兹（Victor, J. Katz, 1942–）也说海伦有可能借鉴自阿基米德。（[2]，p.126）然而，由于海伦公式这一名称沿用已久，本文依然采用海伦公式的说法。《量度》（[8]，pp.19–25）和《经纬仪》（[8]，pp.281–285）都给出海伦公式及证明。已知三角形三边为a, b, c，s是半周长，面积表示为：

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

《量度》第8题：

> 如三角形三边为7，8，9。将7、8、9相加，为24，取半为12，从12中减7余5，减8余4，减9余3，将12乘5为60，乘4为240，再乘3为720，取平方根，得三角形面积。（[8]，p.19）（图1）

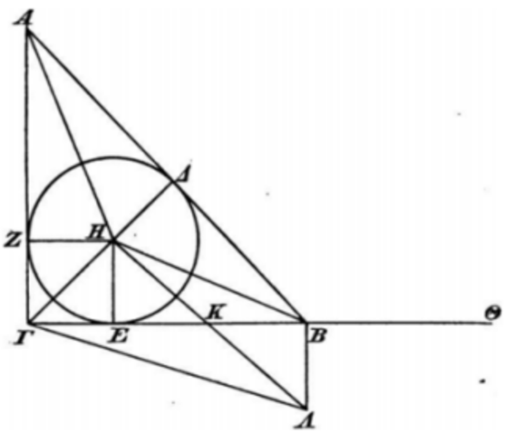

图1 海伦之海伦公式证明图（[8]，p.21）

海伦先做内切圆，再根据比例关系推出结果，这种方法完全是几何的，因此，本文称海伦公式为希腊几何法。

（2）海伦间接法：三边求高

该法基于算术赋值且收入波埃休斯（Boethius, 480–524）《论算术》（*De Institutione Arithmetica*）中，故本文称为希腊算术法，以与几何法对照。《量度》第5题以锐角三角形ABΓ为例，AB=13, BΓ=14, AΓ=15，BΓ的垂线AΔ，由《原本》卷II命题12、13①可得$A\Gamma^2=AB^2+B\Gamma^2-2B\Gamma\times B\Delta$求出BΔ②，再用毕达哥拉斯定理求高AΔ。（[8]，pp.13–15）（图2③）第6题以钝角三角形为例，公式变为$A\Gamma^2=AB^2+B\Gamma^2+2B\Gamma\times B\Delta$。（[8]，pp.15–17）（图3）

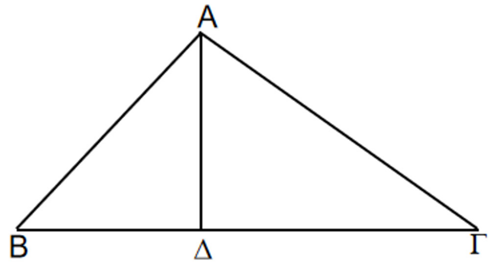

图2 海伦求锐角三角形面积示意图

波埃休斯在《论算术》中记载三边求积：

①命题13：在锐角三角形中，锐角对边上的正方形比夹锐角两边上的正方形小一个矩形的二倍，即由另一锐角向对边作垂线，垂足到原锐角顶点之间的一段与该对边构成的矩形。命题12：在钝角三角形中，钝角所对边上的正方形比夹钝角两边上的正方形大一个矩形的二倍，即由一锐角向对边的延长线作垂线，垂足到钝角之间的一段与该对边构成的矩形。

②图形中所标字母稍有变化。

③图示中，所有标注“示意图”的都是本文所绘。

一个锐角三角形，小斜边13，大斜边15，底边14，其高和面积不知，可用此法：令最短边自乘得169，底边自乘得196，两者相加为365，令斜边自乘为225，两者之和超出其为140，令140减半得70，再除以底边得5，令其自乘得25，再减小边的平方（169）得144，开方得高12。用底边一半7乘以高12得84，即为面积。（图4）[9]

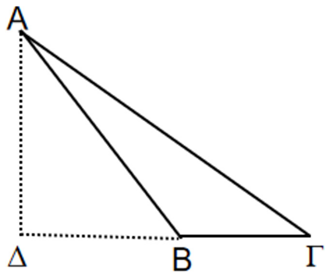

图3 海伦求钝角三角形面积示意图

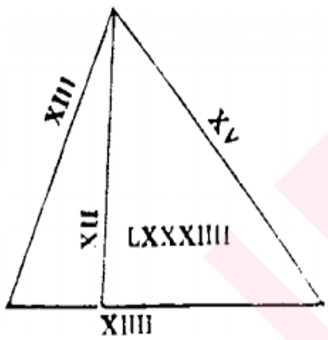

图4 波埃休斯三边求积图（［9］，p.415）

波埃休斯没有给出造术原理，根据叙述，可知与海伦间接法相同，波埃休斯熟悉阿基米德、海伦等人的著作，其方法很有可能继承自海伦，然而，他没有记载“海伦公式”，因此，也不排除其解题原理出自《原本》的可能。但当我们把视野转向东方时，会发现不同的解题思路。

2. 中国——勾股法

（1）秦九韶公式

秦九韶（不详–1261）《数书九章》“田域类”第2题为“三斜求积”（图5）：

沙田一段，有三斜，其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里，里法三百步，欲知为田几何？答曰：三百一十五顷。

术曰：以少广求之。以小斜幂并大斜幂，减中斜幂，余半之，自乘于上；以小斜幂乘大

图5 秦九韶三斜求积图（［10］，p.127）

斜幂，减上，余四约之，为实；一为从隅，开平方得积。（［10］，p.127）

梁宗巨（1924–1995）先生对“术曰”做了详细解释，将过程逐步分解：

（1）设沙田的大、中、小三边为c、b、a，得：

$$\frac{(c^2+b^2-a^2)}{2}$$

（2）将上述结果自乘，得：

$$\left(\frac{c^2+b^2-a^2}{2}\right)^2$$

（3）最后，得：

$$\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+b^2-a^2}{2}\right)^2\right]$$

“实”理解为被开方数或方程的常数项。一为从隅，开平方，得积。二次方程的最高项（二次项）称为“隅”，一次项称为“方”，“从”为正，“益”为负。“一为从隅”代表二次项系数是正1，开方或解二次方程，得面积。[11]设 $s=\frac{a+b+c}{2}$（s：半周长），x为三角形面积，用现代二次方程表示：

$$x^2-\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+b^2-a^2}{2}\right)^2\right]=0$$

$$x=\sqrt{\frac{c+a+b}{2}\,\frac{c+a-b}{2}\,\frac{b+c-a}{2}\,\frac{b-c+a}{2}}$$

秦九韶并未给出证明，用现代方法可验证秦九韶公式与“海伦公式”等价。借助罗雅谷《测量全义》和梅文鼎《平三角举要》，可对秦九韶公式给出补证。

罗雅谷（Giacomo Rho也作Jacques Rho，1593–1638），字味韶，意大利人，明朝来华耶稣会士。“雅谷幼年资钝，习文法，成绩不佳，

研究哲学神学，亦同常人，惟于数学颖慧异常”。[12]他在《测量全义》中给出求“中长线”（从顶角到底边的垂线）的方法，罗氏“中垂线”特指从三角形中心到底边的垂线。

> 法曰：丁乙、丁丙两小边，相并为总，相减得存，存总相乘为实，底数为法而一，数与底相减，所余半之，得相小边之小半底甲丙。用句股法，乙丁、乙甲各自之，相减，开方，得丁甲。（图6）（[13]，p.1357）

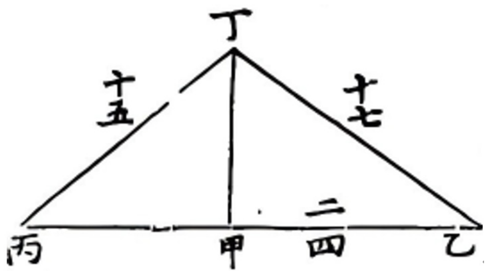

图6 罗雅谷求中长线图（[13]，p.1362）

梅文鼎（1633–1721）《平三角举要》吸收了《测量全义》的内容，如卷3“三角求积第一术”中求中垂线（罗氏中长线）的方法与罗氏相同。

> 术：先求垂线，用锐角第三术。任以乙丙边为底，以甲丙、甲乙为两弦，两弦之较数，总数相乘为实，以乙丙底为法，除之，得数，转减乙丙，余数半之，得乙丁，依勾股法，以乙丁自乘，与甲乙自乘，相减，余数平方开之，得甲丁垂线。以甲丁垂线折半，乘乙丙底，得积。（图7）（[14]，p.477）

图7 梅文鼎求垂线图

沈康身（1923–2009）先生认为，梅文鼎实际上运用了《九章》勾股章中的已知“股弦和、勾，求股、弦”，[15]即：股弦差＝句^2/股弦和。

由图8可知，p为股，q为弦，则句^2=q^2–p^2，对应两个直角三角形，句^2=b^2–a^2，股弦和为p+q=c，则股弦差为：$q-p=(q^2-p^2)/c=(b^2-a^2)/c$，$p=1/2(c-(b^2-a^2)/c)=1/2[c-((b+a)(b-a))/c]$，根据勾股定理求高，再求面积。

吴文俊（1919–2017）先生利用出入相补原理给出另一种复原方法（图9），该法基于刘徽注，即：$股=\dfrac{(股弦和^2-勾^2)}{2股弦和}$。[16]在此题中，股弦和＝大斜，勾^2＝弦^2–股^2＝中^2–小^2，由$股=\dfrac{(股弦和^2-勾^2)}{2股弦和}$可得，$股=\dfrac{(大^2-(中^2-小^2)}{2大}$

$$高^2=小^2-股^2=小^2-\frac{(大^2+中^2-小^2}{2大}$$

$$S^2=\frac{1}{4}\left[小^2大^2-\left(\frac{大^2+小^2-中^2}{2}\right)^2\right]$$

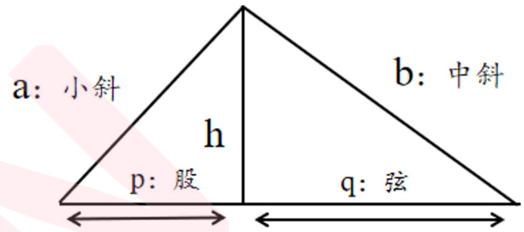

图8 勾股法求股示意图

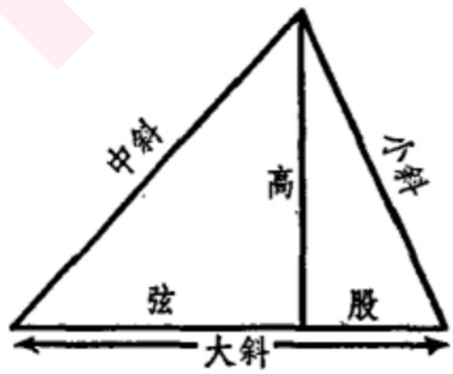

图9 吴文俊复原秦九韶公式图

沈先生和吴先生的差异说明了《九章》原文和刘徽注的不同，然原理都基于勾股法。

《数理精蕴》对“和较”（同“勾股”）相互推求之法的由来做了介绍，其说法与《测量全义》相似：

> 然不拘锐角钝角，自一角至底边作垂线，即分为两直角，是仍不离乎勾股也。两腰等者，垂线即当底之一半，而两腰不等者，所分底界，则有大小不同，故和较相比之法，因之而生。盖和求较，较求和，要必归于勾股相求之理，由勾股而得垂线。（[17]，p.515）

清吴嘉善（1818–1885）在《白芙堂算学丛书》“九章翼·方田术”中对锐角和钝角三角

形求“大句”或“小句”的方法进行整合。

斜三角形有三边求积术曰：任以两边为大弦、小弦，余一边为句和或句较。句和句较相加，半之，为大句。相减，半之，为小句。乃以小句与小弦求其股，或以大句与大弦求其股，此两股数同。为中股。以与句和或句较相乘，二而一，为积。[18]（图10，图11）图中丙戊为句较，乙丙为句和，乙丁为小句，丙丁为大句。

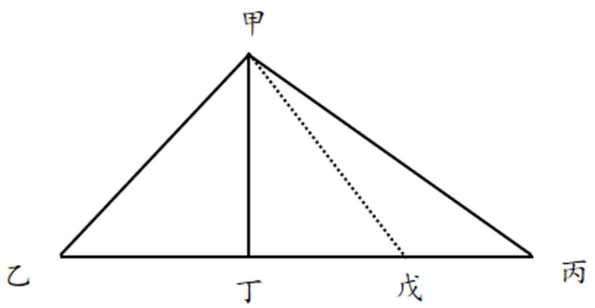

图10 锐角三角形示意图

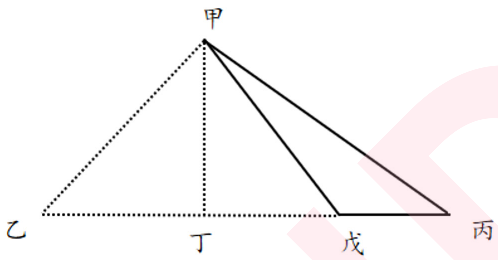

图11 钝角三角形示意图

（2）梅文鼎“以量代算”（中垂线乘半周）以中垂线乘半周得积，谓之以量代算。

> 术：平分甲、乙两角，各作线会于心，从心作十字垂线至乙甲边，即中垂线也。乃量取中垂线得数，合计三边而半之，为半周，以半周乘中垂线，得积。（[14]，p.477）

该术用测量中垂线的高度，适用于比较好测量的图形，此法仅出现于《平三角举要》。（图12）

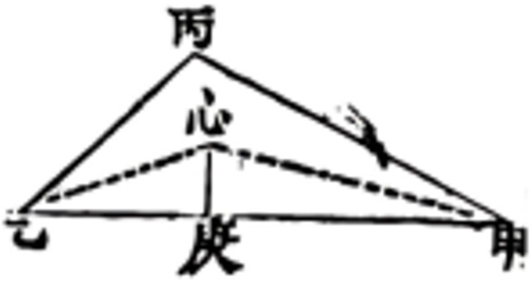

图12 梅文鼎测量中垂线图（[17]，p.477）

> 又术：如前取中垂心庚为阔，半周为长如乙癸及丁壬，别作一长方形如乙壬丁癸，即与钝角形等积。（图13）（[14]，p.478）

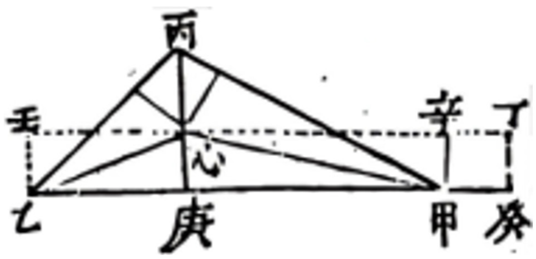

图13 梅文鼎求中垂线图（[17]，p.478）

该法采用出入相补原理，求出的长方形面积即三角形面积。

《测量全义》也记载中垂线乘半周的方法：

> 公法：先求形之中垂线，以形之半周乘之，得形之容。凡有法之形，通用此。（[13]，p.1361）

秦九韶公式、用勾股定理求高再求面积、量取中垂线乘半周、采用出入相补原理将三角形等价为长方形，求解中垂线乘半周，这些文献中记载的与西方不同的方法都体现了中国在解决三角形三边求积时的自主独立性。有关垂线的求解，在阿拉伯文化中又出现不同的方法。

3. 阿拉伯——代数法和勾股法结合

花拉子米（Al-Khwarizmi, 约780–约850）用代数法求高，以三边13,14,15的锐角三角形为例。（图14）

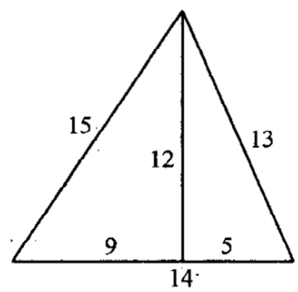

图14 花拉子米用代数法求高图（[19]，p.70）

> 为确定代表高的直线出发的点，必须选一条边作为底边，如选长为十四码的边，表示高的直线的出发的点就在底边上，但和其他两边的距离未知。我们试着找出它和边长为十三的边的距离。[19]

若用x表示未知量，即交点到短边13的距

离，则到长边15的距离为（14−x），借助毕达哥拉斯定理建立方程：$13^2-x^2=15^2-(14-x)^2$

花拉子米引入“未知数”建立方程的方法与中国“勾股法”不完全相同。

希腊有几何法和算术法，中国用勾股法（“和较法”），阿拉伯可谓勾股法和代数法的结合，虽然最后推导出的公式相同，但由于原始公式不同，论证过程迥异，表明他们思想不同。

三、同一文明中“三边求积”的不同方法

1. 阿拉伯——巴努·穆萨《示儿》

9世纪末的巴努·穆萨（Banū Mūsā, 9世纪）是对穆萨·伊本·沙克尔（Mūsā ibn shakir,生卒年不详）三个儿子的统称，他们熟悉阿波罗尼乌斯（Apollonius, 约前262–约前190）、阿基米德、海伦等人的著作。《示儿》（*Verba Filiorum*）第7题记载“海伦公式”[20]，虽然目前不能确定巴努·穆萨到底继承自海伦还是阿基米德，但肯定他们采用希腊几何法，而非花拉子米的方法。（图15）

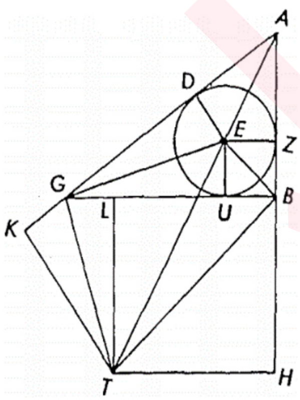

图15 巴努·穆萨之海伦公式证明图（［20］，p.279）

巴努·穆萨没用共圆四边形，通过延长两边做了更多相似三角形，相比之下，海伦的证明更为简洁。虽然巴努·穆萨的方法不如海伦简单，但可以证明他们受到海伦方法的影响。

2. 中世纪欧洲文明——斐波那契与帕乔利

斐波那契（Fibonacci, 1170–1245）在《实用几何》（*Practica Geometriae*）中采用与波埃休斯相同的算术法，[21]还增加了几何法。经比对《实用几何》的拉丁文版、英文版和《示儿》拉丁文版，发现《示儿》有关用海伦公式求三角形面积、用阿基米德方法证明π值、论述圆面积的方法及求正多边形面积的方法在《实用几何》中都可以找到完全相同或类似的叙述。斐波那契对海伦公式的证明与《示儿》仅有些许差异。

> 把三角形三边相加，取和的一半，按顺序将三角形的边从一半中减去，然后一边的余数乘以另一边的余数，两数乘积乘以减去第三边的余数，将最终乘积乘以三边和的一半，即得整个三角形面积。（［21］，p.40）

卢卡·帕乔利（Lucapacioli, 约1445–1517）《算术、几何、比与比例概要》（*Summa de Arithmetica,Geometria,Proportioni et Proportionalita*，简称《数学大全》）证明海伦公式的过程与《实用几何》相同。

> 将三角形的每条边相加，取三边和的一半......这个根就是给定三角形的面积。（［22］，p.9v）

同处于阿拉伯文明，巴努·穆萨没用花拉子米的方法，却与希腊相似，这充分体现了当时希腊文明在阿拉伯得到了继承；同在欧洲文明中，斐波那契很可能在吸收波埃休斯算术法的基础上，借鉴了巴努·穆萨的方法并稍加改变，这说明斐波那契知晓西欧和阿拉伯的方法，并根据自己的理解做出适当的改变，而帕乔利直接使用斐波那契的论证，帕乔利在几何论证方面更多地是直接采用前人的研究成果。

四、不同文明中“三边求积”的同一方法

1. 印度与中国

婆什迦罗一世提出两腰在底边的射影及底边上的高的三个公式，但未给出证明。

$$p=\frac{1}{2}(c-\frac{b^2-a^2}{2}),q=\frac{1}{2}(c+\frac{b^2-a^2}{2}),$$
$$h=\sqrt{a^2-p^2}=\sqrt{b^2-q^2}$$

婆什迦罗二世（Bhaskara II, 1114–1185）在《莉拉沃蒂》（*Līlāvātī*）165、166节给出“投影线等之法则”。

165、三边形中，两臂和乘其（两臂）差，除以底，以商加减被置两处之底，折半，则【分别】为对应于两者（两臂）之二投影线。

166、取臂与其自身投影线平方差之平方根，则产生垂线。

底之一半乘以垂线，为三边形之真果（面积）。（[23]，pp.116–117）

可以看出，婆什迦罗二世的方法与中国完全相同，都可以根据勾股定理进行推导。

2. 印度与希腊

婆罗摩笈多（Brahmagupta，约598–660）在《婆罗摩修正体系》（*Brāhmasphutasiddhānta*）中给出求四边形面积的公式：

一个三角形或四边形的粗略面积为两组对边之和一半的乘积；精确面积为四条边分别减半周长再相乘，所得积开平方。[24]

设四边长为a, b, c, d，半周长$p=\dfrac{(a+b+c+d)}{2}$

近似面积公式$S=\dfrac{(a+c)}{2}\dfrac{(b+d)}{2}$；精确面积公式$S'=\sqrt{(p-a)\ (p-b)\ (p-c)\ (p-d)}$。该公式只适合于圆内接四边形，但其形式与海伦公式极为相似。同处在印度文明中，7世纪婆罗摩笈多公式与希腊更为接近，12世纪婆什迦罗二世的方法与中国相同。

五、西学东渐带来的海伦公式

罗雅谷《测量全义》是明清时期完整记载海伦公式的第一篇文献①，（[15]，pp.450–451）卷四测面上第2题“量三边形”：

乙丙丁三边形，有边数，无角数，求实。其法：并三边数，半之为实，以每边之数为法，各减之。三较连乘，得数以半总数乘之为实，平方开之，得实。（图16）

解曰：......依此，用三较连相乘，又以半总乘之，得数为实，开平方，得元形之积，此用前所得数，本法也。（[13]，pp.1357–1359）

从论证过程和图示来看，罗雅谷对海伦公式的证明过程与斐波那契十分相似，都采用平分两角找交点，而不是做内切圆。

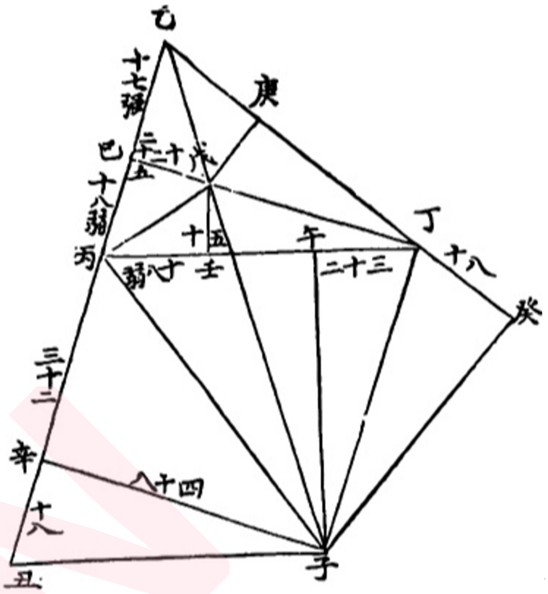

图16 罗雅谷对海伦公式证明图（[13]，p.1357）

梅文鼎《平三角举要》之“三角求积第三术”即海伦公式：

三角求积第三术：以三较连乘，又乘半总，开方见积。......此亦中垂线乘半周之理，但所得为幂乘幂之数，故开方见积。（[14]，p.478）

《数理精蕴》下编卷14“三角形”记载了与海伦公式部分相似的方法：

又法：以甲乙边十七尺，乙丙边二十一尺，甲丙边十尺，三数相加，得四十八尺，为三边之总，折半得二十四尺为半总。以甲乙边十七尺，与半总二十四尺相减，余七尺......以乙丙边二十一尺，与半总二十四尺相减，余三尺......以甲丙边十尺，与半总二十四尺相减，余十四尺......乃以半总二十四尺为一率，甲丙边与半总之较十四尺为二率，乙丙边与半总之较三尺与甲乙边与半总之较七尺相乘，得二十一尺，为三率，求得四率十二尺二十五寸，开方得三尺五寸，为三角形自中

①沈康身认为《数理精蕴》是记载海伦公式的最早文献。参见《历史数学名题赏析》。通过阅读《测量全义》《数理精蕴》后发现，《数理精蕴》记载的前半部分确实与海伦公式相似，但最后还是利用中垂线与半周相乘求面积，而非用三边表示面积，因此，本文提出与沈先生不同的观点：海伦公式的记载首见于罗雅谷《测量全义》。

心至三边之垂线，与三边之总四十八尺相乘，得一百六十八尺，折半得八十四尺，即三角形之面积。或以所得垂线三尺五寸，与半总二十四尺相乘，亦得八十四尺，为三角形之面积也。（图17）（［17］，pp.520–522）

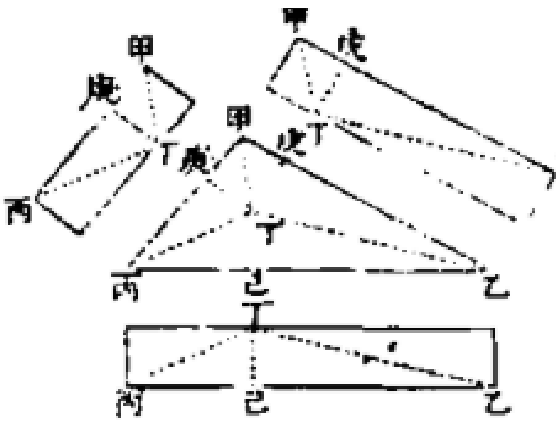

图17《数理精蕴》用中垂线求三角形面积图

《数理精蕴》在论证最后提到“三角形容圆之半径”，这点和海伦在三角形内做内切圆相似，但并未实际作圆；求中垂线的过程和《测量全义》相似，例如“一率二率以线与线为比，三率四率以面与面为比”类比于《测量全义》中的“一二与三四，异类而为比例者，根与根，若积与积也”。然而，《数理精蕴》最后直接用中垂线乘以三边总再折半或中垂线与半总相乘得三角形面积，未整理成海伦公式的形式。海伦求中心到三边的垂线只是证明过程中的一步，并非用其求面积，还是用三边表示面积。

在《测量全义》《平三角举要》之后，很多文献完整地记载了海伦公式，如陈世明（生卒年不详）《数学举要》卷3“方田·直线类”：

术：以三边相并而半之，为半总。以之与丙乙边相减，为三较。即以三较连乘，得数，再以半总乘之，得数，为实。平方开之，即积。（［18］，p.138）

张作楠（1772–1850）《仓田通法·方田通法补例》卷二：

用三较连乘。先并三边而半之，得九十六步，为半总……又与半总乘，得二百八十二万二千四百步。开平方，得一千六百八十步，数亦同。（［18］，p.139）

吴嘉善《白芙堂算学丛书》“九章翼·方田术”：

又术曰：并三边而半之，为半总。各以三边减之，为三较。三较连乘，又以半总乘之，得数。开平方，为积。（［18］，p.140）

《数理精蕴》对海伦公式做了一番本土化改造，前部分证明符合海伦的论述，但三角形面积用罗雅谷和梅文鼎的“中垂线乘以底”表示，这是中西方法的融合。其后的文献直接记载了海伦公式，说明了本土数学家对西方数学的认同和应用，是西学融入中国的绝佳例证。然而以上文献并未记载秦九韶公式，或许是梅文鼎在编纂《平三角举要》时未能看到《数书九章》。

结　　语

通过对不同文明中三角形三边求积的方法的文献探源、综合论述和比较分析，可以看出，不同文明中的不同方法体现了数学知识的独立性和数学家们的创造性；不同文明中的相同方法说明了数学知识在文明之间存在传播和交流；同一文明不同方法又展示了数学家的创新性。此外，中国对异质文化的接受、改造、融合与应用，充分表明了多元文明交流与互鉴的积极意义。我们再从证明过程、知识溯源和文化交流三方面总结如下：

1. 证明过程分析

（1）在证明六个三角形两两全等时，海伦通过做内切圆找圆心，再向三边作垂线，然后连接三角形顶点和中心，作三个角的平分线，巴努·穆萨的做法与之相同，但没用共圆四边形。

（2）《数理精蕴》是先从中心至三边作垂线，再从中心至各顶角作角平分线，罗雅谷先平分两角找出交点，再向三边作中垂线。《数理精蕴》用到了“三角容圆”，罗雅谷没提到内切圆。罗雅谷的证明过程与斐波那契极为相似，不排除他受到斐波那契或帕乔利的影响。此外，梅文鼎和罗雅谷用中垂线乘以半总的做法，其形异而理同。

（3）《实用几何》与《示儿》大同小异。

斐波那契未构造三角形内切圆，而是通过平分等腰三角形两等角保证从三角形中两条直线的交点所做各边的高的长度相等;《示儿》用直角三角形,《实用几何》用等腰三角形。

2. 历史知识溯源

巴努·穆萨继承了希腊的方法，斐波那契很有可能吸收了巴努·穆萨的成果，但在证明过程中又有变化。海伦公式由传教士沿海上丝绸之路带到中国,首现于罗雅谷的《测量全义》,之后更多文献记载这种新方法。中国的秦九韶公式和印度的“投影线等”法则都可以根据勾股原理进行推导，沈康身先生指出：印度文献的这一记载可以作为吴文俊先生借助出入相补原理复原秦九韶公式的一个旁证，吴先生的这一设想也可以作为《莉拉沃蒂》(沈先生原文用《丽罗娃底》)的推导依据。[26]

3. 多元文化交流

不同文明的不同方法充分体现了沿丝绸之路数学文明的多样性、差异性，尽管处在不同文明中，然生活中遇到的相似问题可以激发数学家们创造出独立却类似的理论成果；不同文明的同一方法展示出数学知识传播的影响，印度方法中有的与中国相似，如《莉拉沃蒂》,有的与希腊相似，如婆罗摩笈多公式；西欧中有的与希腊相同，如波埃休斯与海伦，有的与阿拉伯类似，如斐波那契和巴努·穆萨。梅文鼎在《平三角举要》对海伦公式的记载体现了他汇通中西的思想，之后很多数学家完整地记载了该公式，这体现了中国学者对西学的肯定和接受;《数理精蕴》对海伦公式的改造性继承也是中西合璧的极好例证。

沿丝绸之路古代文明实现了跨文化对话，三角形三边求积就是一个生动的写照。诚如梅文鼎对“中西会通论”的阐述:“法有可采，何论东西，理所当明，何论新旧。在善学者知其所以异，又知其所以同。去中西之见，以平心观理。……务集众长以观其会通，毋拘名相而取其精粹”。([14]，pp.680–681)在当今世界中，尽管有冲突、矛盾、疑惑、拒绝，各国文明在保持自主创新的同时，更应继续发扬古代文明开放、包容的精神，互学互鉴，消化融合，这也是开展数学遗产跨文明比较研究的重要意义所在。

[参考文献]

[1] 李文林. 丝路精神光耀千秋——《丝绸之路数学名著译丛》导言[A], 斐波那契 著、劳伦斯· 西格尔 英译、纪志刚 等译: 计算之书[C], 北京: 科学出版社, 2008, iv.

[2] 维克多· 卡兹. 数学史通论(第Ⅱ版)[M]. 李文林、邹建成 等译、胥鸣伟、李文林 校, 北京: 高等教育出版社, 2004, 16.

[3] 沈康身. 历史数学名题赏析[M]. 上海: 上海教育出版社, 2002, 520–521.

[4] 李继闵.《九章算术》导读与译注[M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 1998, 261.

[5] 欧几里得. 几何原本[M]. 兰纪正、朱恩宽 译, 西安: 陕西科学技术出版社, 2003, 35.

[6] 克莱因. 古今数学思想[M]. 张理京、张锦炎、江泽涵 译, 上海: 上海科学技术出版社, 2002, 86.

[7] Heath, T. L. *A Manual of Greek Mathematics*[M]. Oxford: Oxford University Press, 1931, 340.

[8] Hermann, S. *Heronis von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra (vol.3)*[M]. Leipzig: Druck und Verlag Von B. G. Teubner, 1903, 19–25.

[9] Friedlein, G. *De Institutione Arithmetica Libri Duo De Institutione Musica Libri Quinque*[M]. Lipsiae: B. G. Teubneri, 1867, 414–415.

[10] 秦九韶. 数书九章(上)[M]. 上海: 商务印书馆, 1937, 127.

[11] 梁宗巨. 数学历史典故[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1992, 132–134.

[12] 费赖之. 在华耶稣会士列传及书目[M]. 北京: 中华书局, 1995, 192–197.

[13] 徐光启 编纂、潘鼐 汇编. 崇祯历书(下)[M]. 上海: 上海古籍出版社, 2009, 1357.

[14] 梅文鼎. 梅氏丛书辑要卷二十一. 平三角举要三[A], 郭书春: 中国科学技术典籍通汇· 数学卷(四)[C], 郑州: 河南教育出版社, 1993, 477.

[15] 沈康身. 历史数学名题赏析[M]. 上海: 上海教育出版社, 2002, 523.

[16] 吴文俊. 出入相补原理[A], 中国自然科学史研究所: 中国古代科技成就[C], 北京: 中国青年出版社, 1978, 80–100.

[17] 数理精蕴下编卷十四. 三角形[A], 郭书春: 中国科学技术典籍通汇· 数学卷(三)[C], 郑州: 河南教育出

版社, 1993, 515.

[18] 郭书春. 中华大典· 数学典· 中国传统算法分典（二）［M］. 济南：山东教育出版社, 2019, 140.

[19] 阿尔·花拉子米. 算法与代数学［M］. 伊利哈木·玉素甫、武修文 编译, 北京: 科学出版社, 2008, 69–70.

[20] Marshall, C. *Archimedes in the Middle Ages.Vol.I The Arabo-Latin Tradition*［M］. Madison: The University of Wisconsin Press, 1964, 278–285.

[21] Boncompagni, B. *Scritti di Leonardo Pisano Matematico Secolo Decimoterzo*［M］. Rome: Tipografia Delle Scienze Matematiche e Fisiche, 1862, 35.

[22] Luca, P. *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*［M］. Tuscany: Apud Paganius de Paganinus da Brescia, 1523, 9v.

[23] 婆什迦罗. 莉拉沃蒂［M］. 徐泽林 等译, 北京: 科学出版社, 2008, 116–117.

[24] Dvivedin, S. *Brhāmasphuṭasiddhānta and Dhyānagraho-padeṣādhyāya by Brahmagupta*［M］. Benares: Medical Hall Press, 1902, 189.

[25] 沈康身.《丽罗娃底》与《数书九章》［A］, 吴文俊: 秦九韶与《数书九章》［C］, 北京: 北京师范大学出版社, 1987, 279.

［责任编辑　王大明　柯遵科］