

• 科学技术哲学 •

康德的逻辑观对思考数学基础的影响

The Influence of Kant's View of Logic on Thinking About Mathematical Foundation

包向飞 /BAO Xiangfei^{1,2} 桂书杰 /GUI Shujie¹

(1. 武汉大学外国语言文学学院, 湖北武汉, 430072; 2. 武汉大学德国哲学研究所, 湖北武汉, 430072)

(1. School of Foreign Languages and Literature, Wuhan University, Wuhan, Hubei, 430072;

2. Institute of German Philosophy, Wuhan University, Wuhan, Hubei, 430072)

摘要:从学术史的视角来看,逻辑主义、形式主义与直觉主义均与康德的数学观存在密切关联。康德的重要逻辑观之一是:逻辑的适用范围仅限于可能经验。这一观念的接受与挑战引发了对数学基础的深刻探讨。本文考察了康德的逻辑观对希尔伯特有限证明论的影响,比较了康德的数学观与形式主义及柏拉图主义数学观的异同,阐明了理解希尔伯特计划的哲学背景是康德的逻辑观,同时也指出,深入理解哥德尔不完全性定理必须充分掌握希尔伯特形式主义的有限证明论。最后,本文通过量子力学中的双缝实验展示了康德逻辑观在现代科学研究中的持续重要性。

关键词:康德 逻辑 形式主义 柏拉图主义 双缝实验

Abstract: From the perspective of intellectual history, logicism, formalism and intuitionism are intricately linked to Kant's conception of mathematics. A fundamental aspect of Kant's view of logic is the assertion that the applicability of logic is confined to possible experiences. The acceptance and subsequent critique of this view have catalyzed a significant inquiry into the foundations of mathematics. This paper investigated the impact of Kant's view of logic on Hilbert's theory of finite proofs, delineated the similarities and distinctions between Kant's conception of mathematics and the formalist and platonist interpretations of mathematics, and elucidated that Kant's logic provides the philosophical framework essential for comprehending Hilbert's program. Furthermore, it also emphasized that a comprehensive understanding of Gödel's incompleteness theorem necessitates an adequate grasp of Hilbert's finite proofs theory. Ultimately, the author illustrated the enduring relevance of Kant's view of logic in contemporary scientific inquiry, by exemplifying the double-slit experiment in quantum mechanics.

Key Words: Kant; Logic; Formalism; Platonism; Double-Slit experiment

中图分类号: B516.31; G633.6 DOI: 10.15994/j.1000-0763.2025.08.004 CSTR: 32281.14.jdn.2025.08.004

在数学基础的研究中,通常认为存在逻辑主义、形式主义和直觉主义三大主流学派。然而,柏拉图主义、约定主义和建构主义在这一领域同样发挥了重要作用。从学术史的视角来

看,许多数学基础流派的形成与康德关于逻辑和数学的理论息息相关。逻辑主义试图将数学还原为逻辑,主张数学命题为分析命题,并批判康德认为数学命题是先天综合命题的观点。

收稿日期: 2024年12月11日

作者简介: 包向飞(1974-)男,河南信阳人,武汉大学外国语言文学学院教授、武汉大学德国哲学研究所研究员,研究方向为德国哲学、数学哲学和中德文化比较。Email: baoxiangfei163@163.com

桂书杰(1996-)男,河南开封人,武汉大学外国语言文学学院博士研究生,研究方向为中德文化比较。Email: leoj236@foxmail.com

^[1]与之相对,直觉主义明确宣称其与康德数学观的内在联系,^{[2],[3]}反对无条件应用排中律。^[4]形式主义者希尔伯特(David Hilbert)在发展其“有限证明论”时,也充分考虑了康德的逻辑观。^{[5],[6]}

康德逻辑观的重要论断之一是:逻辑的适用范围仅限于可能经验。这一观念的接受与挑战促发了对数学基础的深刻探讨。本文旨在探讨康德的逻辑观对希尔伯特有限证明论的影响,比较康德的数学观与形式主义及柏拉图主义数学观的异同,阐明理解希尔伯特计划需要依托康德的逻辑观,同时理解哥德尔不完全性定理也需充分掌握希尔伯特形式主义的有限证明论。

一、康德的逻辑观

根据康德对逻辑进行划分的文本,逻辑被区分成普遍的逻辑(Allgemeine Logik)和特殊的逻辑(Besondere Logik)。([7], p.52)然后康德又把普遍的逻辑区分成纯粹的逻辑(Reine Logik)和运用的逻辑(Angewandte Logik)。([7], p.53)按照康德的观点,归之于普遍逻辑之下的纯粹逻辑既是知性的法规又是理性的法规,但这只是就其运用形式而言,而不管内容是经验的还是先验的。([7], p.53)康德对普遍而又纯粹的逻辑的理解大概可以等同于我们现代人所理解的形式逻辑,因为任何这样的逻辑都不能违反不矛盾律;而康德对运用逻辑(Angewandte Logik)的理解和人们的一般理解有所不同,因为它并不是对普遍逻辑规则的非纯粹的运用,它其实是一种思维的经验心理学。运用逻辑“研究的是注意力,注意力的障碍与后果,错误的来源,怀疑、顾虑、确信等等状态。”([7], p.54)援用康德的比喻,运用逻辑是我们日常知性的一种清泻剂。([7], p.53)

按照康德的表述,普遍逻辑抽掉一切知识内容,只关注表象的知性形式,而不管这些表象的来源,而先验逻辑(Transzendente Logik)并不抽掉知识的一切内容,但它排除一切具有经验性内容的知识,并且先验逻辑还

重点讨论人们有关对象、而又不能归之于对象的知识来源。([7], p.54)在康德那里清楚的是,从纯粹的形式法则上讲,普遍逻辑和先验逻辑没有什么差别,也就是说,在形式法则上,先验逻辑和形式逻辑没有任何差别,因为先验逻辑在其形式上也只与知性和理性的法则打交道。不过和形式逻辑不同的是,先验逻辑把自己的范围限定在这些法则与对象先天地发生关系的范围内。

根据康德的划分,先验逻辑归属于特殊逻辑(Besondere Logik)之下,因为先验逻辑确实如其它的特殊逻辑一样探讨“正确思维的规则”问题,进而先验逻辑从其运用范围上又进一步被划分为先验分析论和先验辩证论。先验分析论告诉我们先验逻辑的“运用条件是:它可以运用于其上的对象是在直观中给予我们的。”([7], p.58)而对其超出可能经验的使用则有导致幻相的危险。康德说:“……既然这种逻辑真正说来只应是对经验性使用加以评判的一种法规,那么如果我们承认它是一种普遍地和无限限制地使用的工具,并胆敢单凭纯粹知性去对一般对象综合地判断、提看法和作裁决,那就是对它的误用。”([7], p.59)而对此误用的批判构成康德的先验逻辑的第二部分:先验辩证论。

康德把真理解释成“知识和对象的一致”。([7], p.56)由上面的划分我们可以看到,普遍逻辑只关注一般思维的形式而不关注思维的对象。一般思维的形式也就是真理的纯粹形式,因此正命题是成立的:所有真理都必然符合普遍逻辑;但反命题并不一定成立:所有符合普遍逻辑的都必然是真理。康德自己清楚地表达说:“即使一种知识有可能完全符合于逻辑的形式,即不和自己相矛盾,但它仍然总还是可能与对象相矛盾。”([7], p.57)在这个意义上,康德提前拒绝了形式主义、逻辑主义和约定主义的真理。在康德眼中,即使一个形式系统是一致的,也就是说无矛盾,那么它也不是真理,因为它还缺少能在直观中被给予的对象。

因此,如康德所言,普遍逻辑只是真理的消极的试金石。([7], p.57)据此,如果我们

不加限制地把普遍逻辑当成工具使用于任何经验和非经验(超验)的领域,那么它完全可能导致幻相。对于普遍逻辑来说,清楚的表达就是:它的适用范围是可能经验。对此,邓晓芒在不同的语境关联中有如下的表达,但该表达在此也是完全适合的,他说:“形式逻辑不过是附属于范畴之上的形式而已,所以它虽然是‘普遍逻辑’,可以运用于一切(经验的和非经验的)对象之上,但唯有借助于范畴(借助于先验逻辑)而运用于经验知识之上才是它的本分。”^[8]

从康德的观点出发,我们必然得出如下的两个结论:第一,对于一个在纯形式上逻辑自治的陈述,如果它缺少直观,那么它也不是真理;第二,前提是真的,但这也不能必然地证明其逻辑推论必然是真的,因为该推论可能会超越可能经验。

康德对逻辑适用范围的论断并不能总是得到认同,比方说,逻辑主义者和柏拉图主义者就坚决地反对康德的逻辑观。逻辑主义者当然认为逻辑可以适用于一切经验和非经验的领域,数学哲学中的逻辑主义者,比方说罗素就试图把整个数学都建立在逻辑之上,从而剥夺了数学在对象意义上的真理性。^[9]艾耶尔(Alfred Ayer)也断言数学命题是分析命题,是重言式命题,它并不“包括关于任何事实的报道。”^[10]柏拉图主义者,比方说逻辑学家哥德尔,也不赞同康德的观点,他们认为,逻辑也适用于没有感性直观的、超验的理念世界。^[11]

二、希尔伯特的有限证明论

康德从数学家和逻辑学家的行列中收获的并不是一致的反对意见,数学家希尔伯特在《论无限》中就表达了他对康德观点的赞同。他认为把逻辑应用于真实的事物或事件时,它是永远不会欺骗人类的;仅当人们进行任意的抽象定义(尤其是涉及无限多对象的抽象定义)时,人类才有可能受到欺骗。希尔伯特跟随康德,认为应用逻辑演绎和进行逻辑运算的一个先决条件就是:要有逻辑以外的能直观到的具体的对象。([5], p.220) 希尔伯特

不仅表达了对康德的认同,还顺带批评了弗雷格(Gottlob Frege)和戴德金(Julius Wilhelm Richard Dedekind):“在认识到存在着这些必须考虑的先决条件时,我们发现自己是和哲学家相一致的,尤其是和康德相一致的。康德教导我们——而且这是他学说的主要部分——数学处理的题材是与逻辑无关的被给定的。因此数学绝不能单靠逻辑建立起来。由此可知,弗雷格和戴德金如此建立数学的企图是注定要失败的。”([5], p.220)

在这里,我们并不去讨论“数学处理的题材”是不是康德哲学的主要部分,^[12]以及希尔伯特对弗雷格的指责是不是完全切中实际。^[13]我们首先要清楚的是希尔伯特的和康德一致的观点:数学不能还原成逻辑,数学有其逻辑以外的对象(直观内容),以及逻辑在超出可能经验对象范围的运用中可能会导致错误。

根据康德的理论,我们不可以经验“无限”,但是,“无限”这个概念可以作为理念来起作用。所以,从康德的哲学出发,现代数学中的“实无穷集合”只能以“理念”的形式存在。而理念自身“是超验的,是超出一切经验的界限的,所以在经验中永远不会有一个和先验理念相符合的对象出现。”([7], pp.278-279)

如果在经验中永远没有一个对象和理念相符合,那么理念是不是毫无用处呢?康德并不认为理念是“多余的和无意义的”,“知性虽然不能借此(理念)比它按照其概念所能认识的更多地认识对象,但毕竟在这种认识中得到了更好,更进一步的指导。”([7], pp.279-280) 希尔伯特跟随康德,也不认为无限(作为理念)在数学中是一个无足轻重的东西,他说:“留给无限去起的作用只是一个观念的作用——如果我们依照康德的术语,把观念理解为一种理性概念,它超乎一切经验之外,而使具体事物得以完成为一个总体——而且是一个在由我们的理论所建立的框架内,我们可以毫不迟疑地予以信任的观念的作用。”([5], p.231)

可见,在对待“理念”的态度上,希尔伯特比康德乐观些,因为他认为,在既有的理论框架内,人们可以放心地使用理念;而康德认

为，理念只是在认识中给我们更好、更进一步的指导。

具体到数学方面，希尔伯特有必要对“无限”持乐观态度，因为“无限”在数学中几乎是一个无法回避的概念，没有了“无限”，整个经典数学就很难得以建立。在数学分析中，虽然人们可以通过极限理论来使微积分摆脱“无限大”和“无限小”这样的概念，但是“无限”这个概念并没有彻底消失，诚如希尔伯特所指出的：“魏尔施特拉斯的分析确实通过把有关无限大和无限小的陈述规约为[有关]有限量之间的关系[的陈述]而消除了无限大和无限小。但是这个无限仍然出现在定义实数的无限数列中，并出现在被认为是一个同时存在的完备总体的实数系统的概念中。”（[5]，p.211）为了能够涵盖整个经典数学，希尔伯特引入了“理想元素”，他说：“……（理想元素是）关于无限性概念的一个全然不同和很独特的想法。……这些理想的‘无限’元素具有使连接定律系统变得尽可能简单的优点。……在某种意义上，数学分析是有关无限的交响乐。”（[5]，p.215）

可见，如果人们跟随康德，排斥“无限”，那么经典数学的确定性就很难得到保证，因为我们无法把数学始终框定在有限领域。从为经典数学奠基的角度上讲，希尔伯特面临着差不多和康德同样的问题：包含“无限”的数学部分如何才能并入有限的框架中，从而获得自己的合法性？

在考察希尔伯特方案以前，我们再看一处他和康德不同的地方，而这一点对后续的理解非常重要。康德认为：“几何学是综合地却又是先天地规定空间属性的一门科学。……它必须本源上就是直观”；（[7]，p.30）同样，对时间的直观使算术成为可能。希尔伯特并没有像康德那样，认为几何和算术的可能性条件是对空间和时间的直观，而是认为数学的可能性条件是对符号本身的直观。何谓“符号直观”？比方说这样一个可感知的序列：11111。当我们把序列111和序列11放在一起时，我们就会得到序列11111，从感知上讲，这是一个自明的事情。我们可以把以上的活动缩写成 $3+2=5$ 。按照希

尔伯特的理论，这是一个确定的真理，但它不是语言上的，以定义而真的重言式的真理，但它也不是一个一般意义上经验感知的真理。它是一个先验的真理，这个真理源自我们对有限的符号结构的纯粹直观。希尔伯特明确指出：“……数学的题材是具体的符号本身，它们的结构是十分清楚和可认识的。”（[5]，p.220）

针对上面的“无限”难题，希尔伯特的操作是把数学分成了两部分：有限部分和无限部分。有限部分是有真值的和有意义的，无限部分是无意义的，也没有任何真值可言。就像康德相信理念的范导作用一样，希尔伯特也认为，人们可以把包含无限的陈述（理想元素）添加到数学的有限部分上去，这样就可以把数学的证明变得简单流畅，并且还可以导出新的、有限的结果。然而，对理想元素的添加并不能是任意的，希尔伯特强调说：“只有一个与理想元素方法相联系的条件，尽管是绝对必要的条件。这个条件就是一致性证明，因为一个域通过添加理想元素而扩充，仅当扩充不使旧的较狭的域内出现矛盾时，……才是合法的。”（[5]，p.229）

如此，对一致性的证明就变得困难起来。按照希尔伯特的康德主义观点，把逻辑规律应用于数学的有限部分是毫无问题的，而把逻辑规律应用于数学的无限部分却不能总是恰当的。希尔伯特对此有清醒的认识：“但是由于这些理想陈述即这些公式，就它们不表达有限陈述这一点而言并没有什么意义，所以逻辑演算实质上不能像应用于有限陈述一样应用于它们。”（[5]，p.226）

希尔伯特的出路何在？他的方案是使逻辑演算以及数学证明本身形式化。他向我们表明了，在罗素的《数学原理》的帮助下，数学是可以形式化的。希尔伯特总结说：“这样一来，我们最后得到的不是用普通语言传达的数学知识，而只是含有按照确定规则逐次生成的数学符号和逻辑符号的一组公式而已。公式中某一些对应数学公理，用来从一个公式推导出另一个公式的规则对应于实质演绎。于是实质演绎就被一个由规则支配的形式程序替换了。”

([5], p.227)

扼要言之, 希尔伯特首先根据康德主义思想把经典数学分成有限部分和无限部分, 然后他又把经典数学形式化, 于是, 人们面临的不再是一个包含有普通语言的经典数学, 而只是一个包含着没有意义的符号的形式系统, 在这个形式系统里我们不再关心有限陈述和无限陈述的区分, 因为一切都形式化成了无意义的符号及其连接, 并且在形式化以后, 公式和公式之间只具有有限数量的结构关系。公理和推导规则在形式系统里并不具有通常的所指, 它们只保证人们如何对符号及其公式进行操作, 推导规则提供形式程序。此外, 在任何一个证明过程中, 不能涉及无限数量的公式, 也不能涉及对公式进行无限个操作运算。符合这种要求的证明过程被称为是“有限的”; 符合这种要求的一致性证明不同于“模型法”的相对性证明, 它可以被称为是“绝对的”。为了对“无意义的符号证明”有一个清晰一些的了解, 我们看一个具体的例子:^[14]

假设有这样一个形式系统 S 。 S 的初始元: 个体: $\clubsuit, \heartsuit$; 性质: $\diamond, \bullet$ 。 S 的公理: (1) $\forall x(\diamond x \rightarrow \bullet x)$; (2) $(\exists x \bullet x) \rightarrow \diamond \clubsuit$; (3) $\bullet \heartsuit$ 。指示规则: MP (modus ponens), UI (universal instantiation), EG (existential generalization)。等待证明的定理: $\bullet \clubsuit$ 。

证明: $\bullet \heartsuit$ (Axiom 3)

$\therefore \exists x \bullet x$ (By EG)

$\therefore \diamond \clubsuit$ (By axiom 2 and MP)

$\therefore \diamond \clubsuit \rightarrow \bullet \clubsuit$ (By axiom 1 and UI)

$\therefore \bullet \clubsuit$ (By MP)

在该例中, 人们并不需要明白 $\clubsuit, \heartsuit, \diamond, \bullet$ 的含义, 人们只需直观到它们形式上的分别。所谓证明就是按照公理和指示规则进行操作, 如果在最后一行出现了我们所需要的符号串, 我们就说该符号串是定理。然而, 为了能够完成形式系统的一致性证明, 希尔伯特还需要元数学, 所谓元数学, 就是关于无意义的、形式化的数学系统的有意义的命题, 它们是关于形式数学系统的语言。比方说 $1 \neq 2$ 是某个数学形式系统的一个公式, 这个公式本身并没有什么意

义, 也不必要去想 1 和 2 代表什么, 但就此我们可以得到一个元数学命题, 比方说: “这个公式的第一个符号是 1”。

有了元数学, 我们就有可能去证明一个形式系统的一致性, 比方说形式化数论。按照希尔伯特的方法, 如果可以建立形式化数论的一致性证明, 那么该证明就可以通过有限的元数学语句来实现: 两个相互矛盾的公式 (比方说 $1=1$ 和 $1 \neq 1$) 不可能在相同的推理规则下同时从公理中推导出来。

已知, 希尔伯特的“有限证明论”的思想有很强的康德哲学的背景, 也就是说, 希尔伯特在设计“有限证明论”的时候, 时时铭记康德的告诫, 不让逻辑跨越“有限”; 但同时, 我们也看到了, 如果希尔伯特的“证明论”能够成功, 那么数学的“真”原则上就和作为纯直观的时间和空间无关, 因而数学的命题并不是康德意义上的先天综合命题, 而更像是一个以约定而为真的形式演绎系统, 虽然希尔伯特通过“符号直观”给直观保留了一丁点位置。

三、有限证明论的失败和柏拉图主义

希尔伯特的方案在某些形式系统方面是成功的, 比方说, 命题演算这个形式系统就可以通过希尔伯特的“有限证明论”被证明为是绝对一致的。不过, 命题演算系统只是形式逻辑的很小一部分编码, 它的符号和规则甚至不能发展出初等算术。希尔伯特的方案也有着更强的力量, 比方说, 通过元数学推理, 就可以证明一个包含加法公理而不包括乘法的形式系统的绝对一致性。

如前述, 希尔伯特是在罗素的《数学原理》的帮助下完成了对经典数学的形式化, 而《数学原理》所提供的形式系统是足以表达整个数论的。所以, 重要的问题是: 像《数学原理》这样的形式系统的一致性可以用希尔伯特方案得到证明吗?

不幸的是, 所有证明的试图都失败了。直到 1931 年, 哥德尔却给出了一个出人意料的证明, 这个证明表明了, 所有严格遵循希尔伯特

方案的努力都是不可能取得成功的。哥德尔的证明有两个重要的结果：

“任一足以包含自然数算术的形式系统，如果是相容的，则它一定有一个不可判定的命题，即存在某一命题 A ， A 与 A 的否定在该系统中皆不可证。这个结果通常被称为‘哥德尔第一不完全性定理’”；“在真的但不能由公理来证明的命题中，包含了这些公理是相容的这一论断本身。也就是说，如果一个足以包含自然数算术的公理系统是相容的，那么这种相容性在该系统内是不可证明的。这一结果通常被称为‘哥德尔第二不完全性定理’”。^[15]

在哥德尔的证明中，一个重要的方法就是对映射的巧妙运用。首先哥德尔把形式化的算术系统中的符号、符号串都映射为数，这些数被称为哥德尔数；然后哥德尔通过引入递归函数，证明了元理论中的命题能够在算术系统中得到表示，它们由此就映射成了算术命题，也就获得了自己的哥德尔数。结果是：算术系统中的一部分表达式（符号串）获得了元数学的意义。

现在，我们以哥德尔第一不完全性定理为例来作进一步的说明，作为第一不完全性定理的证明的另外的关键一步是：构造一个命题 A ，令其在对象系统里的元数学含义是“ A 是不可证明的”，“ A 是不可证明的”当然是一个元数学的命题，我们可以把它记为 A' 。

A 就是我们需要的命题， A 在形式系统内是不可证明的。因为如果我们假设： A 是可证明的，那么 A 为真（因为我们的公理系统要求，凡是可证明的命题必然是真的），进一步的结论是 A' 真（因为命题的真理性在映射下保持不变），而元数学 A' 的意义是： A 是不可证明的。这与我们的假设矛盾，所以 A 是不可证明的。

在这里我们要提醒的是，就像《哥德尔证明》的作者所指出的那样，哥德尔定理并没有排除其它的一致性（相容性）证明的可能性，它排除的只是能被映射到《数学原理》内的一致性证明，也就是说，彻底的形式主义的有限证明。^[16]

哥德尔定理在数学哲学上的影响是重大

的。用公理系统来处理数学，并把数学理解成以约定而为真的系统的想法也是困难重重的，因为人们并不能在形式系统内证明系统是一致的，如果我们设计出的数学公理系统是潜藏着矛盾的，那么建基在上面的数学就无真理可言。

哥德尔定理向我们表明了，在数学中“真的”和“可证明的”是两个不同的概念：在数学系统一致的前提下，“可证明的”当然都是真的；但是“真的”并不简单地意味着“可以证明的”。哥德尔定理向我们暗示了：数学的另外一个真理来源是直觉的洞察。哥德尔定理不仅强有力地否定了形式主义者的数学观，也否定了大部分的逻辑主义者的数学观点，“只要逻辑被认为是可形式化的（即逻辑上有效的公式构成一个递归可枚举集合），认识论逻辑主义的一个自然命题，在相当基础的假设中，就与哥德尔第二不完全性定理不相容。”^[17]

英国的数学物理学家、诺贝尔物理学奖的获得者彭罗斯（Roger Penrose）说：“哥德尔论证的清楚推论是，数学真理的概念不能包含在任何形式主义的框架中。”（[18]，p.129）借助哥德尔定理，他表达了他的柏拉图主义的数学观：“我并不掩饰自己强烈同情柏拉图主义的观点，也就是数学真理是绝对的、外在的、永恒的，并不基于人造的判据之上；数学对象具有超越时间的自身的存在，既不依赖于人类社会，也不依赖于特定物体。”（[18]，p.133）在对待数学上，哥德尔本人也表现得像一个柏拉图主义者，^[19] 他并不认为对于形式主义者的形式系统而言不可判定的问题就是没有真假的问题，因为人们可以通过在“柏拉图王国”中“找到”新的数学公理来解决一些数学问题的判定。哥德尔在《罗素的数理逻辑》一文中说：“结果证明（在现代数学是一致的这一假定下）某些算术问题的解决要求本质上是超越算术（亦即可能最适合于与感官知觉相比的那种初等的无可质疑的领域）的假定。……某些其他数学问题多年来所呈现的看来不可克服的困难，也是由于必要的公理还没有被找到这一事实。”^[11]

在对待数学上，康德并不是一个柏拉图主义者。（[7]，pp.6-7）尽管他们都认为，数学

命题是先天命题,并且数学命题不能只依靠纯粹的逻辑分析得到,数学是本质上需要直观的。然而,他们对直观的理解是不同的。在康德那里,数学所需要的直观是纯直观(Reine Anschauung),([7], p.26)说到底,是一种感性直观。而柏拉图主义的直观却是一种“心眼的直观”(the intuition of the mind's eye),说到底是一种理性直观。在这种意义上,“心眼的直观”差不多等同于康德的“知性直观”,然而,康德并不认为人类具备知性直观能力。在这里值得一提的是,直观在数学中的作用这一问题深刻地影响了康德数学哲学的研究者,强有力地塑造了他们的研究方向。两个主要的对康德直观的阐释路径(现象学的和逻辑的)由此形成。^[12]

康德的“纯粹的直观形式”是属于人类的,如果数学建立在“纯粹的直观形式”上,那么数学就有了很强的人为建构的味道。不过康德强调说,虽然“一般感性直观的纯粹形式将会先天地在内心中被找到”,([7], p.26)但它并不是因人而异的,对人类来说,它是普遍的和必然的,康德甚至说:“我们也并不需要把空间和时间中的这种直观方式局限于人类的感性;有可能一切有限的有思维的存在者在这点上是一必须与人类必然一致的(尽管对此我们无法判定)……”。([7], p.50)

可见,在康德那里,“数学的客观”就变成了“主体间的客观”。于此,他迥异于柏拉图。数学的客观,根据柏拉图主义者的观点,与人类的心智无关,尽管人类依靠理性可以通达这种客观。要言之,柏拉图主义的客观性不仅具有主体间的客观性,它还具有超越人类心智的更强的客观性。

然而,就像希尔伯特所强调的那样,无限(比方说实无穷集合)在数学中有着不可或缺的地位,康德的数学观能对包含“实无穷集合”的现代数学提供哲学基础吗?好像不能,就像我们在康德对柏拉图的批评中看到的那样,康德认为,理性在离开了“可能经验”后可能会毫无成果,甚至会走向谬误,而“实无穷集合”显然并不属于“可能经验”。

四、逻辑可以超越可能经验吗?

逻辑与经验的关系问题并不是一个已经解决的问题,康德对此的论断在当代科学中依然具有重要的参考价值。对此我们考察对量子力学具有基础意义的双缝实验来阐明逻辑与经验的关系问题。在物理学中,对双缝实验的经典解释是通过波粒二象性来达成的。通过复数的波函数,微观粒子的波动性得到了成功的描述。然而,描述实物粒子的物质波并不就是经典的波,它是波恩所说的概率波。物质波的主体仍是粒子。^[20]显见,我们并不能无矛盾地把经典波和粒子联系在一起。^[21]

下面,我们将根据美国物理学家费曼(Richard Feynman)对电子双缝实验的描述,([22], pp.381-385)结合本文的论证目的对实验条件做如下设定:电子以很慢的速度一个个地发射。所有电子均需穿越双缝结构屏障抵达后置探测平面,该屏障的几何构型严格限定粒子的传输路径——除双缝开放区域外,其余界面均不具备可穿透性通道。

对某个具体的电子来说,如令 p 表示该电子“穿过”缝隙,则 $\neg p$ 表示该电子“没有穿过”缝隙。如果该电子穿过缝隙,那么它要么从缝隙1穿过;要么从缝隙2穿过。令 q 表示从1穿过,基于上述的实验设定,从2穿过,必然是 $\neg q$ 。

$p \vee \neg p$ 是排中律。 $p \rightarrow p$ 是同一律。 $p \equiv (q \vee \neg q)$ 这是我们实验的设定,它表示在该电子到达终端探测平面的情况下,它要么是通过1,要么是通过2。 $q \vee \neg q$ 是排中律。综上: $p \rightarrow (q \vee \neg q)$ 必真。

一个电子自发射枪射出后,若在终端探测平面出现一个电子,则依据经典逻辑可推断:该电子无法同时穿越双缝,它只可能穿过其中一个,用上述符号表示就是: $p \rightarrow (q \vee \neg q)$ 。

人们本来希望逻辑具有这样的力量:我们并不需要检验(观察)实验的中间过程,在既定的实验安排下,我们完全可以根据已知事实逻辑地推理出结果。对于这个双缝实验,我们的希望是这样的:如果人们缓慢地一个一个地

发射电子, 这些电子逐次地到达了终端探测平面, 不用进行任何观察, 人们就可以逻辑地推理出终端探测平面上的电子分布。

然而, 终端探测平面上电子的实际分布图案是令人惊讶的, 因为它并不和我们的逻辑推理相一致, 亦即, 实际分布并不是从缝1过来的电子和从缝2过来的电子的简单叠加, 而是出现了明暗相间的干涉现象。

如果人们使用电子检测器跟踪每一个电子, 看它们究竟是如何穿过狭缝并且造成干涉的, 那么人们又会发现终端平面上的结果和逻辑预言相一致, 即它们的分布等于从缝1过来的电子的分布加上从缝2过来的电子的分布。在逻辑上, 本来使我们骄傲的是这样的事情: 只要前提是确定的, 我们不需要对中间过程的“直观(经验)”就能够“推理”出结果, 而现在我们必须得“看(经验)”到这一中间过程, 在不“看(经验)”的情况下, 我们的逻辑推理竟然是错误的。

从这个量子力学的实验中, 我们可以得出一个有利于康德逻辑观的阐释: 逻辑的有效运用应当在可能经验的范围之内, 尽管逻辑并不依赖于某个具体的经验, 但是, 如果超出了可能经验的范围, 我们的逻辑推理可能导致错误。在我们这个例子中, 要想得到干涉图案, 我们必须对“每个具体的电子如何穿过缝隙”保持无“直观(经验)”, 也就是说, “每个具体的电子究竟穿过哪条缝隙”在得到干涉图案的情况下并不属于可能经验, 我们并不能把我们的逻辑推理延伸到这一领域。就像费恩曼在评价双缝实验时所指出的那样, “为了避免作出错误的预测”, “我们就必须走这一条(逻辑)钢丝。”([22], p.385)

结 论

康德主张逻辑的运用应限定于可能经验, 这一论断在逻辑主义、直觉主义和形式主义的理论发展中产生了深远的影响, 尤其为理解希尔伯特的有限证明论提供了重要的理论背景。希尔伯特在试图将数学中的无限部分纳入有限

框架时, 受到了康德关于直观与逻辑关系的启发, 提出了其独特的符号直观。由此可见, 理解康德的逻辑观对于深入把握希尔伯特的有限证明论至关重要, 而希尔伯特的有限证明论又是理解哥德尔不完全性定理的关键。

哥德尔的不完全性定理对希尔伯特的有限证明论构成了显著挑战, 揭示了其局限性。这一冲击不仅影响了形式主义, 也对逻辑主义产生了深远的影响, 从而使柏拉图主义在数学基础讨论中变得更加重要。柏拉图主义者与康德的数学观存在显著差异, 如果柏拉图主义能够有效为数学基础提供支持, 则康德关于逻辑运用领域的限定可能会受到质疑。然而, 量子力学中的双缝实验为康德逻辑观提供了支持, 表明康德的理论在当代科学中依然具有重要的参考价值。

[参考文献]

- [1] 克拉夫特. 维也纳学派[M]. 李步楼、陈维杭 译, 北京: 商务印书馆, 1998, 28.
- [2] 布劳威尔. 直觉主义和形式主义[A], 保罗·贝纳塞拉夫、希拉里·普特南: 数学哲学[C], 朱水林 等译, 北京: 商务印书馆, 2003, 90.
- [3] Schlimm, D. 'Against Against Intuitionism'[J]. *Synthese*, 2005, 147(1): 171-188.
- [4] 布劳威尔. 意识、哲学和数学[A], 保罗·贝纳塞拉夫、希拉里·普特南: 数学哲学[C], 朱水林 等译, 北京: 商务印书馆, 2003, 109.
- [5] 希尔伯特. 论无限[A], 保罗·贝纳塞拉夫、希拉里·普特南: 数学哲学[C], 朱水林 等译, 北京: 商务印书馆, 2003, 210-232.
- [6] Ferreirós, J. 'Hilbert, Logicism, and Mathematical Existence'[J]. *Synthese*, 2009, 170(1): 33-70.
- [7] 康德. 纯粹理性批判[M]. 邓晓芒 译、杨祖陶 校, 北京: 人民出版社, 2004.
- [8] 邓晓芒. 康德哲学诸问题[M]. 北京: 生活·读书·新知三联书店, 2006, 10.
- [9] 罗素. 数理哲学导论[M]. 晏成书 译, 北京: 商务印书馆, 2003, 9.
- [10] 艾耶尔. 语言、真理与逻辑[M]. 尹大贻 译, 上海: 上海译文出版社, 2006, 63.
- [11] 库尔特·哥德尔. 罗素的数理逻辑[A], 保罗·贝纳塞拉夫、希拉里·普特南: 数学哲学[C], 朱水林 等译, 北京: 商务印书馆, 2003, 521-522.

- [12] Stanford Encyclopedia of Philosophy. 'Kant's Philosophy of Mathematics'[EB/OL]. <https://plato.stanford.edu/entries/kant-mathematics/>. 2025-02-01.
- [13] Hale, B. 'Frege's Platonism'[J]. *The Philosophical Quarterly*, 1984, 34(136): 225-241.
- [14] Brown, J. R. *Philosophy of Mathematics* [M]. New York and London: Routledge, 2008, 68.
- [15] 李文林. 数学史概论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002, 340.
- [16] 内格尔、纽曼. 哥德尔证明 [M]. 陈东威 等译, 北京: 中国人民大学出版社, 2008, 83-85.
- [17] Hellman, G. 'How to Gödel a Frege-Russell: Gödel's Incompleteness Theorems and Logicism'[J]. *Noûs*, 1981, 15(4): 451-468.
- [18] 罗杰·彭罗斯. 皇帝新脑 [M]. 许明贤 等译, 长沙: 湖南科学技术出版社, 1995.
- [19] Martin, D. A. 'Gödel's Conceptual Realism'[J]. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 2005, 11(2): 207-224.
- [20] 张三慧. 大学物理学 (第4版): 电磁学、光学、量子物理 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2018, 343.
- [21] 威切曼. 伯克利物理学教程 (第4卷): 量子物理学 [M]. 潘笃武 译, 北京: 机械工业出版社, 2015, 152.
- [22] 费曼. 费曼物理学讲义 [M]. 第一卷, 郑永令 等译, 上海: 上海科学技术出版社, 2020.

[责任编辑 王巍 谭笑]

