结构数学视域下抽象代数的崛起与扩散

The Rise and Spread of Abstract Algebra from the Perspective of Structural Mathematics

闫焱 /YAN Yan

（华北理工大学理学院，河北唐山，063210）
(College of Science, North China University of Science and Technology, Tangshan, Hebei, 063210)

摘　要：代数学作为现代数学重要的基础与核心，伴随着结构数学的兴起，经历了从经典的符号演算到抽象代数的发展历程。抽象代数主要研究各种公理化代数系统和不同代数系统之间的相互联系，并以其结构的一般性，实现了将许多种类各异的、高度数学化的学科进行代数化处理。本文在结构数学的视域下，分析了抽象代数如何从古典代数经历了对象化，集合化，结构形式化的过程。揭示了在20世纪交叉融合背景下，抽象代数通过将其思想和方法渗入到其他学科领域中，从而推动了诸多交叉学科的发展。

关键词：结构数学　代数学　抽象代数　交叉融合

Abstract: As an important foundational core of modern mathematics, algebra has developed from classical symbolic calculus to abstract algebra with the rise of structural mathematics. Abstract algebra mainly studies the relations between various axiomatic algebraic systems and different algebraic systems, and enables algebraic treatment of many different and highly mathematical disciplines with its general structure. In the view of structural mathematics, this paper analyzes how abstract algebra underwent objectification, collectivization and structural formalization from classical algebra. It is revealed that abstract algebra has promoted the development of many interdisciplinary disciplines by introducing its ideas and methods into other disciplines against the background of cross fusion in the 20th century.

Key Words: Structural mathematics; Algebra; Abstract algebra; Cross fusion

中图分类号：O15; N09　DOI: 10.15994/j.1000–0763.2024.02.010　CSTR: 32281.14.jdn.2025.02.010

20世纪结构主义在数学哲学中占据着主导地位，主要考察的是研究对象的结构以及结构之间的关系。随着系统概念的广泛使用，“结构”逐渐成为了各学科研究的目标之一。结构主义如果在学科种类的层面，有数学结构主义、语言学结构主义、人类学结构主义、心理学结构主义、哲学结构主义、符号学结构主义等，这些在欧洲历史上都是极具代表性的，其中数学结构主义主要研究数学是通过什么样的结构被表达出来。在结构理论的维度，数学学科的产生与创新是通过作为结构系统的各种实践、表象与活动进行的。希尔伯特（D. Hilbert）被视为结构数学的先驱，数学的结构主义源于希尔伯特的数学基础概念，他的思想简而概之就是数学结构由下层基础的公理系统和上层的模型构成，他将数学由研究对象本身变成了进一步研究对象之间的关系。然而使结构数学成为现代数学主流的是布尔巴基学派，该学派利用集合、公理以及数学结构涵盖了几乎整个现代数学。[1]结构数学的理论和方法对许多学科的发

基金项目：国家自然科学基金资助项目“结构数学在现代代数学中的渗透与应用”（项目编号：12171137）。
收稿日期：2023年1月11日
作者简介：闫　焱（1979–）女，河北唐山人，华北理工大学理学院教授，研究方向为代数学及近现代数学史，Email: yanjxky@126.com

展起到了重要的指导作用，推动了大部分经典数学打开了新的局面。

代数学的历史几乎可以和人类的文明史相媲美，伴随着结构数学的兴起，代数学逐渐成为了现代数学的重要基础与核心，它经历了从经典的符号演算到抽象代数的演变历程。本文试图在结构数学的视域下，对抽象代数从古典代数经历的对象化，集合化，结构形式化过程展开较为系统的剖析，以此揭示在新一轮技术革命的推动下，抽象代数凭其结构的张力性，如何将其思想和方法渗入到其他学科领域之中，通过交叉融合孕育出新学科的生长点和研究前沿方向。

一、以算法为中心的古典代数学

据记载公元前3000年左右，在埃及和巴比伦的文明中，人类出于对生产及生活的需要，产生了以实用为目的（如度量、计时和土地测量等实际问题）的数学。在代数学的发展道路上，古埃及人创造了最早的方程，从而大大推动了人类的进步。古巴比伦人则让人类在数学道路上走得更远，为了求解一些特殊形式的方程，他们创造了用特殊符号代表未知量的方法，这些都是代数早期的初始形态。古希腊数学家丢番图（Diophantus）是代数学重要的创始人之一。在他13卷的巨著《算术》（*Arithmetica*）中，丢番图发明了用字母表示未知数的方法，并开始解答含有若干未知数的方程，并为此还发明了能简化解题过程的运算定律。[2]

从5世纪到11世纪，代数学的发展几乎处于凝滞状态。12世纪在数学史上是翻译者的世纪，当阿拉伯和希腊的一系列著作被陆续翻译、传播到欧洲以后，欧洲数学开始复苏。13世纪前期，欧洲各地兴建了一些历史上著名的大学，代数学在这些大学中得到了重视和发展。在14世纪的文艺复兴时期，数学像美术、音乐、文化以及科学一样在欧洲繁荣了起来，并且展现出了一种趋势——用代数学的方法去解决科学中的问题。科学家们发现代数学可以成为他们表述思想的一种便利工具，这种工具能使不同性质之间的抽象关系更加明朗、更易处理，从而促进了科学的进步。[3]伽利略的名著之一《关于两门新科学的对话》中遍布着代数学思想，但是这并不是一部代数学著作，而是一部关于科学的著作，伽利略在这部著作中利用代数函数的文字形式表述了自己的科学观点。

从16世纪末到17世纪初，数学进入了近代数学时期，产生了近代数学的三大基础学科之一的符号代数学（或字母代数学），这在数学的世界中是一场革命性的变化，它将算术中数的运算过渡到代数的符号运算。韦达（F. Viète）是第一个系统地引入代数符号的数学家，他将计算分为两类，一类是之前的数值计算，一类是符号计算。尽管如此，依照今天的代数学视角，韦达的这个符号体系有些复杂，随后笛卡尔改进了韦达的符号体系，比如在语言上笛卡尔使用的是易懂的法兰西口语，在形式上去掉了许多不必要的限定条件。1628年，笛卡尔将前人的几何分析方法同近代人的代数方法相结合，从而形成了统一的普遍数学，从而完成了符号代数学的建立。

数学的发展史是伴随着漫长的符号化进程的：从数字及其表示的符号化，到运算的符号化，到关系的符号化，再到区别未知量、已知量、未知量系数的符号化、最后到更一般对象的符号化（如集合、曲线、方程等）。事实上，符号化是使问题代数化至关重要的一步，它使得初等几何学问题变得代数化、形式化、从而为程序化以及机械化证明奠定了基础。在17世纪，算术因为符号化促使了代数学的产生，在这种符号化的演变过程中，代数学作为一种符号语言，在许多数学分支中成为了数学家表述自己思想的标准范式。代数使计算变得精确和方便，也使计算方法系统化。尽管如此，符号代数学的产生并没有改变代数的算法本性，但由此派生了两类相关的新问题：计算对象以及计算法则。大约在1840年前后，代数学发展成为了对任意对象进行运算操作的一门科学。计算对象以及计算法则又得到了新的发展，计算对象进一步扩大，特别是行列式、矩阵、置换、变换等均可以成为运算的对象，只是它们的计

算法则不一定再服从数的运算法则。计算法则更加系统化与扩大化，比如幂等律、德·摩根律等新规则的确立。此外，符号化促使了形式化的发展，这使得从1840年前后到1920年前后，在抽象群理论、交换环论、交换代数理论、域论、结合代数及非结合代数理论以及李群理论的发展过程中，形式地推广促进了不同问题的解法统一成共同的算法，使方法进一步简洁化和系统化，这些都推动着代数学逐渐走向了结构数学研究的道路。

二、近代代数学：研究抽象代数结构的一门结构数学

古典代数学主要是进行符号演算，其主要问题是解代数方程和代数方程组。尽管在19世纪，代数的基本问题仍是代数方程及方程组的求解。但是数学家们发现对于五次、六次、七次乃至次数更高的方程，找不到求根公式，在这种情况下，数学家们希望创造出另一种代数，转向一个新领域。此外，在集合论的刺激下，产生了探索数学基础的运动热潮，形成了三大“数学哲学”学派：布劳威尔（L. E. J. Brouwer）为首的直觉主义、希尔伯特为首的形式主义和罗素为首的逻辑主义。他们分别都想用自己的观点统一数学，但是都没有成功。这一时期，整个代数学由于群及域的观念而使其自身发生了根本的改变，尽管这种远离古典代数学的“异端”在最初并不被世人所接受，经过了四五十年的发展之后，人们才开始意识到数学的对象除了“数”与“形”，还有“群”这类抽象的对象。19世纪中叶后，这种抽象的对象层出不穷，这为20世纪代数结构观念的产生奠定了基础。代数学由于群概念的引入和发展而打开了新的局面，这门学科关注的对象不再仅仅是代数方程，而是扩展到研究各种抽象对象的运算关系。19世纪末，当抽象群可以概括所有具体群的共同性质，抽象群概念随即诞生，并且可以很自然地把许多具体群论的结果都推广到抽象群中。由于群概念的日趋成熟且涵盖了当时大部分的数学，因此一大批数学家尝试以群的观念来统一数学。如果说毕达哥拉斯的数学哲学是“万物皆数”，那么外尔（H. Weyl）的数学哲学总结起来可以说是“对称即群”。

在数学史上，近代代数学的数学结构思想经历了由戴德金（J. W. R. Dedekind）到希尔伯特，再到诺特（E. Noether），最后到范德瓦尔登（B. L. van der Waerden）的学术思想发展历程。戴德金作为库默尔（E. E. Kummer）的得意门生，他在库默尔理想数的基础上，提出了理想概念，建立了理想理论，实现了从数到集合的推广。诺特的抽象代数系统研究始于理想理论，特别是她对交换环论的工作使之成为了代数学的重要研究领域，并且在数学中产生了强大的内交叉效应，推进了很多其他数学分支的发展。[4]1930–1931年，得到诺特真传

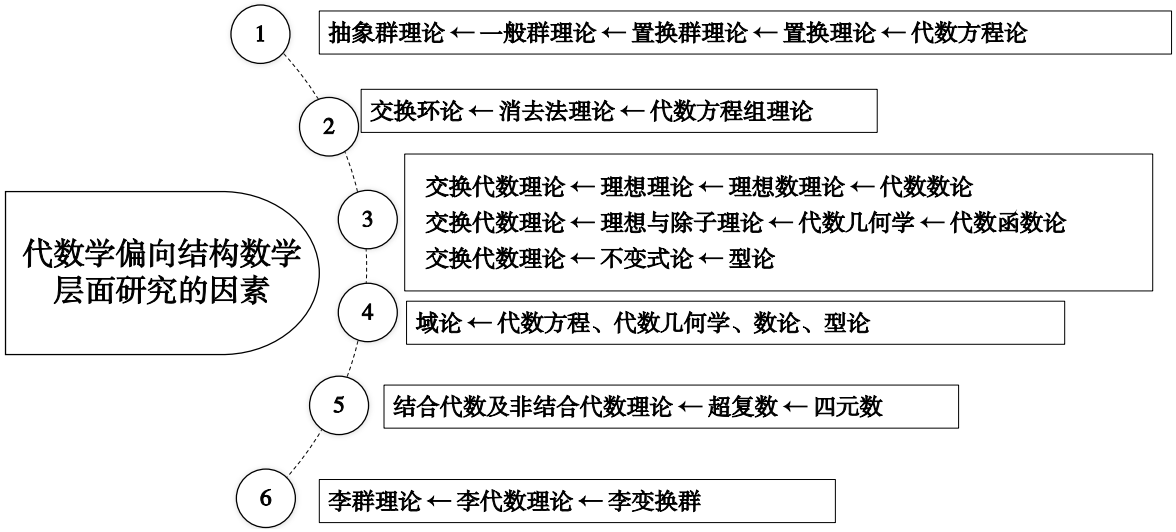

图1 代数学偏向结构数学层面研究的因素

的数学大师范德瓦尔登出版了《近世代数学》（*Moderne Algebra*），从此确定了代数结构化的思想形成，成为了数学代数化趋势的思想源泉，标志着抽象代数学的正式诞生，[5]这部书也被世人公认为是抽象代数学发展过程中的一个里程碑。19世纪群论和抽象代数的诞生促使代数学的问题由解方程的问题转化为研究群结构的问题，由此，代数学从古典代数学走向了抽象代数学之路。随着19世纪数学的发展，数学对象及方法得到了大范围的推广。在这一时期代数学的发展方向产生了几次拐点，可以说19世纪数学的多样性在代数学的演变中得到了淋漓尽致的彰显，由于代数学历经了数度变化，使得现在的代数学相较于古典代数学而言，都要冠以“近代”以示区别。

伴随着代数学的发展，19世纪开创了四大重要分支：代数数论、代数函数论、代数几何学与代数不变式论，这四大分支直接指向了当时代数学中的理想理论，进而导向了交换环论以及部分域论，对这些部分统一性的抽象化诱发了20世纪结构数学的萌芽。尽管如此，结构数学的对象并没有系统地产生，这是因为结构对象的产生依赖于集合的产生、公理化定义方法和结构的观念，这些都是在数学基础与数理逻辑的研究中随之产生并发展而来的。1899年希尔伯特发表的“几何学基础”（Grundlagen der Geometrie）为现代数学树立了公理化模式，发展了公理学，推动了数学基础的研究，掀起了数学公理化热潮。1900年希尔伯特给出了完备而简单的实数公理化系统，在希尔伯特的工作基础上，莫尔的学派对域和群进行了公理化，从而为代数结构的公理化奠定了基础。客观上讲，希尔伯特的公理化思想为整个结构数学奠定了稳固的基础。

20世纪20年代末至30年代初，抽象代数逐渐成为了代数学的主流，其研究的对象是满足若干条件、具有代数运算的集合。在这一时期，“代数”一词有两种含义：一是作为一个数学分支；二是作为一种代数结构。从结构的角度研究代数是20世纪代数学研究发展的一个趋势，抽象代数讨论代数结构，其中最基本的对象是群、环、域，其他对象都是这三个对象衍生出来的。群作为最纯粹的代数对象，具有应用性广，抽象度高的特点。环和域虽然具有较为复杂的代数结构，但是它们拥有极为明显的数的背景，而且它们的发展完全与数的推广密切相关，因此在数与多项式的背景下，理解环和域是比较形象的。诸如环、域和模等许多代数结构都可以看成是在群的基础上衍生出来的，由此可见在代数中群具有最基本的重要地位。

20世纪30年代，“新数学基础”运动席卷数学界，布尔巴基学派就是在这种背景下产生并初显他们所提倡的结构主义运动端倪的。布尔巴基的结构思想得益于19世纪中叶以来数学在各个知识领域的繁荣与进步，特别是像群、环、域等这样一些基本的抽象结构，为处理各种数学对象及其关系奠定了基础。利用这些结构的一般性质，可以轻易地得到以前是由一些复杂的特殊论证和计算才能得到的结果。布尔巴基的数学尽管是抽象的，但是其结构数学的

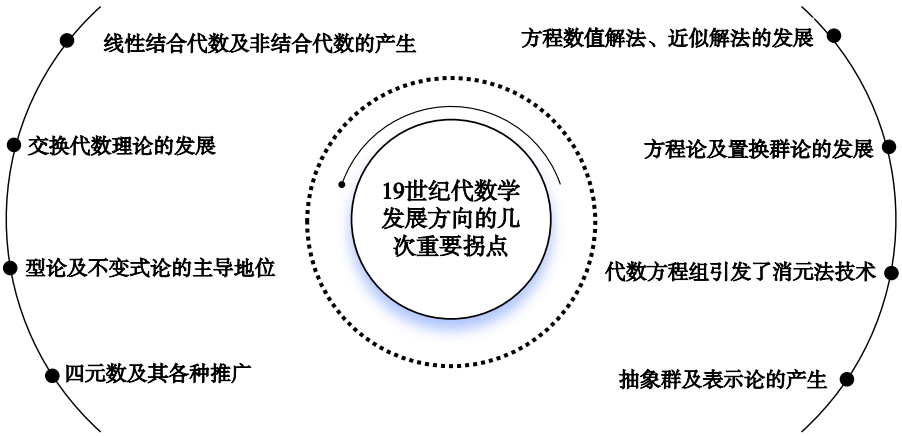

图2　19世纪代数学发展方向的几次重要拐点

对象或是从经典数学中演化而来，或者经过原始对象混和、交叉、限制及扩张而来。伴随着集合论诞生并成为了整个数学的基础，对集合整体性质的研究构成了现代数学的主流，

相比于在经典数学的定理涉及一个特殊的对象性质或者一类对象中每个个体共有的性质，结构数学的定理涉及一个集合的整体性质，结构数学由此应运而生。

三、代数结构的衍生与交叉渗透

在19世纪末和20世纪初集合化和公理化浪潮的作用下产生了很多的抽象结构，这些结构大都可以通过公理化方法来定义，从而形成自己的问题和理论体系，并且衍生出一套相关的结构及理论。20世纪数学形成了很多抽象分支和学科，众多数学研究者投入到了创建新理论、发展新方法、解决大问题、进行新交叉或者新应用的研究中。[6]，[7]

1. 与交换代数融合的理论

在数学研究的过程中经常会呈现出一种数学哲学思维：抛开多余的信息，抓住问题的本质。数学推理的魅力常在于找到一个框架，在其中将试图证明的结果变得几近明显，数学的创造力主要在于找到这样一个框架。正如数论、代数、几何及分析四个互不相干的数学领域逐步形成了一种共同的代数结构——交换代数。代数数论、代数几何和不变量理论，可以视为是交换代数的三大起源。反过来，交换代数也通过交叉渗透去影响这些领域的发展。

20世纪的数学发展中一个重要趋势是不同学科互相渗透和由此发生的统一，其中诺特所开创的抽象代数学以及她的抽象思想方法不仅奠定了代数学的未来发展，也促使了整个数学“代数化”趋势的产生。[8] 特别是交换环理论不仅在理论上获得了丰硕的成果，成为了代数学一门重要的分支，而且在代数几何、代数数论、拓扑学、多复变函数论以及组合理论上均有重要的交叉应用。比如，1970年朗兰兹（R. Langlands）把代数数论与群表示论联系起来，从而把代数数论纳入到更大的框架之内。代数数论的研究也从早期侧重算术方面的研究（研究集中在代数整数及其构成的环上），转移到侧重代数方面的研究（即着重研究代数数的代数方程及其伽罗瓦群）。历史上，代数数论中的惟一分解定理、理想、模等为交换代数提供了早期的框架。[9] 再有，作为19世纪最伟大的数学创造之一的代数几何，该理论体系中最原始的公共零点以希尔伯特不变式论的形式，构建了诺特环的基础理论。反过来，交换代数为代数几何提供了有力的工具，两者之间的界限现在已经逐步消失，并融入在了数学中的前沿领域中。[10] 还有，19世纪的代数函数论曾是数学研究的核心地带，许多数学家将代数函数论作为代数几何的超越理论加以论述，这样代数函数论很自然地被融入到代数几何并成为其中的组成部分。由此从几何的角度，代数函数论被纳入到代数几何学范畴。到了20世纪中叶，代数函数论已经完全代数化，并同一般域上的代数曲线论进入到了交换代数范畴。

回顾展望这些与交换代数相融合的理论，不仅感叹这位伟大的“抽象代数之母”——诺特，是她赋予了抽象代数这门学科旺盛的生命力，并在很多学科领域植入了抽象代数这颗强大的种子。

2. 抽象代数：持续强大的交叉渗透力

数学中很难有哪个数学分支能够与代数学的历史演变同日而语，代数学既承载了数学发展史中的经典厚重，又势不可挡地展现了交叉融合背景下不容忽视的强大力量，现今代数学所包含的思想和方法已经渗入到许多学科领域之中。

在数学史上，早在17世纪代数化的趋势已经显现，并从中酝酿着代数学交叉应用的思想观念。最为典型的就是笛卡尔把变量解释成数量（即线段的长度），使他首创了将代数方法作为研究几何学的一种工具。正是由于代数和几何的交叉融合，促使了解析几何学的诞生，代表着数和形的统一，实现了代数与几何方法的统一，并将此方法付诸于解决科学问题。[11] 再如18世纪欧拉（L. Euler）著名的《无穷分析引论》（*Introduction to Analysis of the Infinite*），引

发了从几何式的分析方法向代数式分析方法的转变,催生了一门“代数分析学”的数学分支。[12]

20世纪的数学强调共同的基础结构，使得以往一直被认为毫不相干的数学领域之间的新关系不断被发现。布尔巴基学派受抽象代数思想的启发提出了一般的数学结构观点：将序结构、拓扑结构和代数结构作为三类原始的结构，以这三类结构为基础，通过它们的交叉、结合可以派生出新的层次结构，诞生新的学科或者研究方向。20世纪以来，不同分支领域的数学思想与方法汇集碰撞、成果交流，数学内部学科交叉成为了新学科的生长点。将某一学科的思想方法应用到另一学科中，一系列新思想、新理论、新知识或新分支凝聚而成。代数学在这一过程中成为了20世纪交叉融合发展理念下的有效引擎，它通过与其他学科的互通互融，算子代数、代数拓扑、代数组合等新学科如雨后春笋破土而出。

算子代数的创始人冯·诺依曼在研究量子力学数学基础表述的时候，很自然地将算子集合作为研究对象，与此同时诺特和阿廷（E. Artin）关于环论的工作成果为冯·诺依曼提供了开创意义的思想方法，再结合冯·诺依曼对遍历理论、群表示和量子力学的研究，由此诞生了算子代数这门新的分支。[13]从结构数学的视角，算子代数是代数结构与拓扑结构相结合的产物，通常用代数的形式表达结果，用解析的方法给出证明。算子代数这一新的数学分支随后迅速成为了是现代分析学中的热门领域，在物理尤其是量子场论方面有着深远的影响。

20世纪以来代数学的研究对象、研究方法以及研究范围已经产生了翻天覆地的变化。由于群结构具有普适的一般性和外延的张力性，在派生数学新领域、新内容的过程中，依托群论的方法成为了极具创造性的思维模式。[14]1926年诺特首次提出用群论观点解释同调论。在诺特的影响下，群论进入了同调论，为这个领域注入了强大的思想动力，同调群以及同调模等逐渐成为了同调论中重要的研究对象，代数工具逐步被引入到拓扑学，拓扑不变量也从数扩展为群、环、模等代数结构。代数的渗透在经典拓扑学中种下了生长的种子，由此产生了蝴蝶效应，从而形成了利用抽象代数方法研究拓扑学的代数拓扑学（即将拓扑不变量与群、环、模等代数结构交叉融合），其发展势头一跃超过了点集拓扑学。[15]外尔十分欣赏诺特在抽象代数方面的工作，他认为抽象代数的引入对于经典的组合拓扑学是一次极大的促进，同伦群的研究更是将代数拓扑学的研究推上了新的高度。

重要的思想容易在意想不到的地方找到应用，正是由于代数思想的强大张力，组合学家和群论学家——尤其是那些对置换群感兴趣的学者——都意识到他们所研究的内容有一个共同的框架，这个框架可以通过各个学科提出的见解加以扩展和进一步研究。从群论的观点来研究组合数学，这为组合数学注入了新的活力，亦为代数组合这门学科找到了适合的生长点。代数组合作为组合数学与抽象代数两门学科的一个重要分支，它涉及到可以用组合和代数解释的对象。除了可以利用代数方法或结论研究组合问题，也可以利用组合的视角解释一些抽象的代数结果。代数组合的特色魅力就在于通过数学结构，本质上彰显了在数学统一性的趋势下表现出来的代数学的渗透与应用。

代数组合这门学科的研究历史可以与群的特征理论媲美，包括弗罗贝尼乌斯（F. G. Frobenius）、舒尔（I. Schur）和伯恩赛德（W. Burnside）的研究理论。[16]代数组合作为一门具有代数化思想的交叉学科，在罗塔（G. C. Rota）、斯坦利（R. P. Stanley）、维兰德（H. Wielandt）、希格曼（D. G. Higman）、坂内英一（E. Bannai）等众多学者的共同努力下，开辟了一条新的道路，才有了建立代数组合的数学基础以及将其带入数学主流的系统尝试。[17]-[19]“代数组合”一词首先是坂内英一于1979年在日本著名刊物《数学》（*Sugaku*）上发表的“代数组合论”（Algebraic Combinatorial Theory）这篇评论性文章中提出的，[20]由此宣告了这门学科的诞生。坂内英一一贯主张以纯粹数学的观点研究组合数学，坚持用群论的视角为组合数学的研究开创新的思路和方法，从而建立起“代

数思维”与“代数组合中思维实践”之间的关系思考，这正是20世纪这个统一的时代所彰显出来的一种特色趋势——“代数学无处不在”。

1984年坂内英一与伊藤达郎（T. Ito）出版了系统论述代数组合的第一部专著《代数组合I. 结合方案》（*Algebraic Combinatorics I. Association Schemes*），[21]这本专著重点刻画了结合方案与有限群和正交多项式之间的本质联系。在代数组合数学科体系中，结合方案具有类群的结合性和逆元性的数学结构，基于这些深刻联系，代数组合因此被描述为“组合对象的表示理论”或“没有群的群论”。自代数组合被系统研究以来，许多群论的概念和性质被发现可以推广到结合方案上来，例如：子群、正规化子、有限群的幂零性、西罗定理以及表示理论等。这些信息都影射出一个强烈的信号，一个看似没有群理论的学科内蕴着强大的群论思想和“没有群的群论结构”。由此可见，代数学在组合数学领域生根发芽孕育出了强大的前沿学科，反过来，组合数学也是启发代数思想进行学科交叉的活水源泉。

结　　语

在人们探寻古典文明的道路上，数学以其长时段的视野和世界史的维度，丰富地展示了在数学的语境中人类文明的起源和演进。结构数学以其浓厚的结构意识更新了经典数学的研究范式，通过集合、公理及数学结构涵盖了几乎整个现代数学，并且以此推动大部分经典数学进阶到了崭新的领域，其深刻程度强烈影响了后现代数学的整体发展，这种抽象的结构概念同经典数学一样具有强大的生命力和无限的价值魅力。

［参 考 文 献］

[1] 胡作玄、邓明立. 20世纪数学思想 [M]. 济南：山东教育出版社，1999, 103–131.

[2] 胡作玄. 近代数学史 [M]. 济南：山东教育出版社，2006, 383–385; 630–631.

[3] 约翰·塔巴克. 代数学：集合、符号和思维的语言 [M]. 邓明立、胡俊美 译，北京：商务印书馆，2007, 71–87.

[4] 胡作玄. 爱米·诺特与抽象代数学的兴起 [J]. 自然辩证法通讯，1983, 5（2）：58–68.

[5] 邓明立、王淑红. 格廷根代数学派的传人——范德瓦尔登 [J]. 自然辩证法通讯，2005, 27（4）：98–104.

[6] Kleiner, I. 'Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures'[J]. *Historia Mathematica*, 2001, 28(4): 304–312.

[7] Parshall, K. H., Wussing, H., Shenitzer, A. 'The Genesis of the Abstract Group Concept: A Contribution to the History of the Origin of Abstract Group Theory'[J]. *The American Mathematical Monthly*, 1986, 93(10): 823–826.

[8] 王淑红、邓明立. 爱米·诺特对交换环论的贡献 [J]. 自然科学史研究，2016, 35（4）：477–486.

[9] Kazhdan, D., Ziegler, T. 'Applications of Algebraic Combinatorics to Algebraic Geometry'[J]. *Indagationes Mathematicae*, 2021, 32(6): 1412–1428.

[10] Wigner, E. P. 'The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences'[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1960, 13: 1–14.

[11] 克莱因、张理京、张锦炎. 古今数学思想 [M]. 第一册，上海：上海科学技术出版社，1979, 206–231.

[12] Philip, K. 'Bolzano’s Ideal of Algebraic Analysis'[J]. *Studies in History & Philosophy of Science Part A*, 1975, 6(3): 229–269.

[13] 胡作玄. 冯·诺伊曼：二十世纪的天才数学家 [J]. 自然辩证法通讯，1984, 6（2）：67–78.

[14] 邓明立、王涛. 历史与结构观点下的群论 [M]. 北京：科学出版社，2016, 92–106.

[15] 张勇、邓明立. 维托尔德·胡列维茨与20世纪的拓扑学 [J]. 自然辩证法通讯，2019, 41（4）：113–122.

[16] 王昌、刘瑶瑶. 有限群表示论的历史溯源 [J]. 自然辩证法通讯，2019, 41（5）：67–72.

[17] Higman, D. G. 'Finite Permutation Groups of Rank 3'[J]. *Mathematische Zeitschrift*, 1964, 86(2): 145–156.

[18] Wielandt, H. *Finite Permutation Groups*[M]. New York: Academic Press, 1964, 39–40.

[19] Higman, D. G. 'Intersection Matrices for Finite Permutation Groups'[J]. *Journal of Algebra*, 1967, 6(1): 22–42.

[20] Bannai, E. 'Algebraic Combinatorial Theory'[J]. *Sugaku*, 1979, 31(2): 126–143.

[21] Bannai, E. 'Combinatorics Regarded as Pure Mathematics: The Aims of Algebraic Combinatorics'[J]. *Sugaku*, 2010, 62(4): 433–452.

［责任编辑　王大明　柯遵科］