分割不可分割的一

——雅各布·克莱因论希腊数学中的单元

The Division of the Indivisible One: Jacob Klein on *Monad* in Greek Mathematics

晋世翔 /JIN Shixiang[1]　　张东林 /ZHANG Donglin[2]

（1. 北京科技大学科技史与文化遗产研究院，北京，100083；2. 广西民族大学科技史与科技文化研究院，广西南宁，530006）
(1. Institute for Cultural Heritage and History of Science & Technology, University of Science and Technology Beijing, Beijing, 100083; 2. Institute for History and Culture of Science & Technology, Guangxi Minzu University, Nanning, Guangxi, 530006)

摘　要：雅各布·克莱因将胡塞尔晚期的历史现象学充分运用于科学史研究。他发现，希腊人对数的理解浸透着当时人们对存在的领悟。以计数与计算技艺为基础，柏拉图区分出依次奠基的四种数学知识，并将计数单元与数的统一性建立在与可感世界分离的理念间的属种关系中。亚里士多德则以实体理论为基础，激烈地批评了柏拉图的分离理论，将数学对象的存在归于灵魂的抽象，从而淡化了柏拉图对计数单元“不可分割性”的排斥，为一种涉及分数使用的计算科学提供了存在论上的可能性。

关键词：历史现象学　编史学　希腊数学史　数的单元　分数

Abstract: Jacob Klein made full development of Husserl’s late work on phenomenology of history in the study of the history of science, and found that the Greeks’ understanding of numbers was saturated with the understanding of being at that time. On the basis of counting and calculating skills, Plato distinguished four kinds of knowledge of numbers that were founded in turn, and established the unity of counting units and numbers in the relationship between Species and Genus that are separated from the sensible world. Aristotle, on the basis of the theory of Ousia, fiercely criticized his teacher’s theory of separation, and attributed the being of mathematical objects to the abstraction of the soul, thereby downplaying Plato’s rejection of the “indivisibility” of counting units, and provided ontological possibility for a calculating science involving the use of fractions.

Key Words: Phenomenology of history; Historiography; History of Greek mathematics; *Monad*; Fractions

中图分类号：K545; O1　　**文献标识码：**A　　DOI: 10.15994/j.1000–0763.2024.11.010

希腊数学中有分数吗？初看起来，答案似乎很明显。作为一个商业、法制、军事发达的文明，希腊的日常生活充满了货物交易、土地分割、军队调遣等实践，其中不可避免会用到几分之几这样的精确计算。希腊人既然能够毫无障碍地处理这类问题，怎么可能没有分数的概念呢？

按照通常的数学史叙事，希腊人用“部分”（*meros*或*morion*）一词表示现代数学中的“单位分数”，即分子为1的分数。“几分之一”在希腊算术文本中通常表述为“第几部分”（如“四分之一”称为“第4部分”）。如需表达“*M*分之*N*”，就说“*N*的第*M*部分”，或者用“部分”的复数形式，称为“*N*个第*M*部分”。（[1]，pp.42–44）

基金项目：北京科技大学科技与文明中外人文交流研究开放课题（项目编号：2023KFYB007）。
收稿日期：2023年2月8日
作者简介：晋世翔（1982–）男，河北宁晋人，北京科技大学科技史与文化遗产研究院副教授，研究方向为科学思想史、历史知识论。Email: jinshixiang@ustb.edu.cn
张东林（1979–）男，广西桂林人，广西民族大学科技史与科技文化研究院讲师，研究方向为科学思想史、数学史。Email: zhangdonglin@gmail.com

（[2]，p.228）欧几里得《原本》则将“几分之一”表述为“与［某数］同名的部分”，该表述首次出现在卷七命题37：“若一数被另一数度量，则被度量的数有一个与度量它的数同名的部分”。转换成现代人更容易理解的形式就是：“若b整除a，则a的1/b是一个整数”。例如12可被4整除，欧几里得称为12能被4度量。根据这一命题，12必有一个“第4部分”，或按欧几里得式的说法，“一个与4同名的部分”。现代人则会借助“$12 \times 1/4=3$”这样的计算式来理解该命题。

但是如果更仔细地考察欧几里得的文本，我们便会发现，依靠代数符号的现代表述虽然可以帮助我们初步了解原命题的大致意思，但也暗中带入了许多原来没有的意义，从而遮蔽了某些值得关注的方面。在现代数学语境下，1/4或1/b这样的分数是一个比1更小的数，并且可以跟其它的数进行相乘、相加等运算。而在命题37乃至整个《原本》中，欧几里得从来只在谈论两个数之间的关系时才使用“部分”一词，称一数是另一数的“一部分”或“几部分”（卷七定义3和4），而从未将“部分”当成独立于所论及的两个数之外的另一个数学对象，他也从未提到过1的部分。“部分”不但不是数，连被独立提及的资格都没有，更不要说对它做运算了。

对现存其它希腊数学文本的进一步考察也表明，在丢番图、海伦的时代之前，希腊数学的理论、教学与实用文本中从未出现过a/b这个意义上的分数概念，也没有出现过两个分数的相乘、相加等运算。（[2]，p.227）

与此形成对照，公元3世纪中叶活跃于亚历山大里亚的丢番图在《算术》（*Arithmetica*）一书中任意地对1进行分割，将分割出来的“部分”用于相乘、相加、平方、开根等各种计算。而且书中大多数问题的最终答案都出现了这样的“部分”。例如卷四的问题34要求找出满足给定条件的“三个数”，最终得出的答案是33/12，7/5和68/12，似乎意味着这些零碎的“部分”也可以被称为“数”了。

通常的数学史叙事将上述转变归因于希腊化时期不同文化之间的交流与融合，归因于偏重实用的美索不达米亚数学传统对希腊理论数学的影响，试图在埃及和巴比伦数学传统中追踪丢番图思想的来源。但是，关于“来源”和“影响”的叙事并不能解答如下疑难：古典希腊时期同样也有偏重实用的数学传统，在理论数学的文本传统之外也有非文字的实践传统，并且当时希腊人对于埃及等地的数学传统也并非一无所知，那为什么多种多样的传统在古典时期并没有能够让希腊理论数学产生“分数”，而到了希腊化时期又能够造成影响了？如果希腊理论数学与它之外的那些传统是如此地异质，那么双方的影响与交融究竟何以可能？如果“分数”是来源于其它传统，那又如何解释那些传统中的“分数”从何而来？将源头归结为某人的研究动机或某种实践的需求也只是在描述实际诞生的过程，并未解释这种诞生是何以可能的。

可见，对“来源”和“影响”的追究并不足以让我们真正理解数学对象的起源。探讨起源问题需要一种完全不同的溯源工作——不是在“来源”链条上追寻遥不可及的开端，而是要去探究使得一个既成的数学对象成为可能的前提是什么。这首先需要细致考察该数学对象在不同的理论和实践中“作为……而存在”的各种情形，进而追问它的每一种存在方式何以可能。这属于现象学哲学中的先验追问。现象学家胡塞尔和海德格尔的学生雅各布·克莱因（Jacob Klein）的数学史代表作《希腊数学思想与代数的起源》（以下简称《起源》）正是以这种现象学的追问方式寻根溯源，从考察希腊人对于数及其单元的存在方式的不同理解入手，揭示了希腊思想与近代思想方式的根本区别。

一、柏拉图关于数的知识的四重划分

克莱因的独特追问方式将我们的关注点首先引向柏拉图《理想国》中与数有关的一段对话。紧随卷七著名的洞喻，柏拉图指出，“计数”（numbering）与“计算”（calculation）是两项基础技艺，所有技术、思维和知识都要用到。他看到，人们在日常生活中经常会对经验到的事物进行计数，从而获得“*arithmos*”，

即确切数目的确切事物（a definite number of definite things）。这个数出一、二、三的计数过程虽然十分基础，但却非常重要。他将这门关于所有可能数的科学称为“数的技艺”，即“数艺”（arithmetic）。如果人们不再满足于仅仅对事物进行计数，而是转向以这些数为基础，通过减去或增加的方式生成一些新数，并就它们彼此之间的关系展开探究时，就诞生出一门关于计算的技艺，即“算艺”（logistic）。（[3]，pp.18–19）

柏拉图进一步强调，这两项技艺十分重要，但是“并没有人正确地运用它，尽管它能以各种方式把人拉向存在”。（[4]，523a）为了说明这一点，他举例说，当人们审视自己的三根手指时，会发现它们虽然在颜色、质地方面存在着差异，但是视觉却能够将每个指头呈现为一个个指头。然而，如果涉及到在指头间比较大小，那么光凭视觉就不够了。处理这种包含有相反感觉（大小、粗细、软硬）的东西，需要灵魂唤起它的计算与思维（intellect）能力，用来检验事物呈现出的相反的“双重体”（twofold）。“这使得我们认识到，当这个软（或大）与那一个硬（或小）合到一起时，是彼此区分，而非‘混合’的‘二’，即：‘各自是一，但是合起来是二，并且这二是由思维来完成分离（separated）的……（使得）彼此相互区别、不混杂’。”（[3]，p.75）简言之，柏拉图认为，通过比较，被唤起的灵魂的推理能力（*dianoia*）完成了对知觉给予的混合事物所分有理念的分离，区分出包含在事物之中的某种呈现为“多”的关系性特征。

正是围绕上述“各自是一，但是合起来是二”的问题，柏拉图引入了著名的分离理论，即：理智与感觉在“看”事物的方式上是不同的。视觉所见的是可见的世界，而理智把握的是可理解的世界。由于“二被领会为分离的，因为理智不会把不可分离的东西领会为二，而领会为一”，所以二是超越感知世界，存在于理智世界内的东西。（[4]，524b）在完成两个领域划分之后，柏拉图马上强调，“数”与“一自身”都是属于理智世界内的存在，故而建立其上的以计数和计算为核心的数艺与算艺能够把灵魂拽出洞穴，朝向真理。为了进一步澄清这一主张，柏拉图借苏格拉底之口补充道：

> 如果人们为了求知而非交易来练习计算，那么它就是一种精微的，对我们想要（追问）的有较多帮助的东西。……它用力将灵魂向上拉，并迫使灵魂讨论数本身（numbers themselves）。如果有人要它讨论属于可见物体或可触物体的数，是绝对不会被允许的。因为你一定知道，精于此道的人是什么样子，如果有人企图在谈话中分割这个“一自身”（one itself），他们一定会讥笑他，不允许他这么做。然而，如果你要把它切碎，他们就要一步不放地使用倍增（multiply）来对付你，生怕“一”看起来不是“一”而是许多零碎的东西。（[4]，525d–e5）

根据克莱因的解读，柏拉图不仅以计数与计算为基础，区分出数艺与算艺，还对后两者进一步增加了“理论的”（theoretical）与“实践的”（practical）限定。所谓实践的是指与具体可感事物相关，以具体生活实用（商业交易、土地测量、和音学、天文学等）为导向的计数与计算技艺。“相较于实践技艺，‘理论数艺’和‘理论算艺’的对象，则是彼此完全均一的，仅由思想所把握的，不可分割的‘纯粹’单元（pure unit），而非那些通过感觉经验到的事物。”（[3]，p.6）因此，据上述两个标准，柏拉图将关于数的知识界定为如下四种：理论数艺（theoretical arithmetic）、实践数艺（practical artihmetic）、理论算艺（theoretical logistic）、实践算艺（practical logistic）。（[3]，pp.21–25）（[5]，p.202）

具体而言，人们在日常生活中通常都在与实践数艺与实践算艺打交道。前者让人们能够数出感觉提供给灵魂多少个具体东西，如三头牛、五条狗等，后者则与实际计算活动相关，涉及具体可感事物数量之间的关系，如建立在比和比例之上的和音学。柏拉图数学思想的独特之处在于，他强调这两门实践科学并不能自足，需要以两门关于计数和计算的理论科学为前提和基础。其中，理论数艺探究的是让经验

计数成为可能的预设和条件。唯有设定存在着仅由思想把握的，剥离了经验特征的纯粹单元（units，*monas*）以及由这些单元倍增而得到的纯粹数自身的领域，灵魂才能把握“一个东西”，并进而数出其它“诸多东西”。不仅如此，这门科学还要讨论在单元组成的纯粹数本身的领域内，数如何能够维系自身的“一”，同时将被计数的“多”统一起来，从而用“一个数”来完成对“多个单元”的连接。与理论数艺所关心的问题类似，理论算艺则要重点研究让计算活动成为可能的那些由纯粹思想单元组成的纯粹的数之间的关系，包括比和比例。

在所有上述四门数的科学中，作为计数之基础的理论数艺最为基础。这是因为“一个多者（multitude）的诸部分与这个多者自身（作为它们的和）的最简单关系在各部分被计数或加起来时就立刻给出了，这是通过一个遍历各部分多者的全部成员的计数过程给出的。相加与减去不过是计数的延续。甚至于，那些复杂的计算性操作所依靠的数之间的所有其余的关系，在其最终分析中也都可以归结到由计数而确定的数的秩序。”所以“只有在计数技艺的基础上，关于数的世界的其它进一步的知识才可能获得。计算也才是可能的”。简言之，“对柏拉图而言，那个独属于人的能力——能够计数（to be able to count），与之相应的世界中诸事物的可数性（countableness），是超越所有具体问题的基本事实。这个事实决定了柏拉图学说的总体方向”。（[3]，pp.19–21）

上述关于数的知识的四重区分为理解前文所引讨论纯粹计数单元不可分割性的文字提供了思想语境。在引文中，柏拉图强调了如下两层含义：第一，让灵魂向上攀升，走出洞穴的数学并非那种满足日常生活、与可感事物密切联系的实践数艺和实践算艺，而是关于纯粹数本身的理论算艺，以及为其提供基础的理论数艺。第二，在理论数艺家看来，分割思想所把握的纯粹单元是绝对不允许的。作为纯粹单元的“一”不是由零碎的“多”组成的，多者只能以倍增纯粹单元的方式得到。正是对纯粹单元不可分割性的强调，使得柏拉图将“数（多者）的部分”视为这个数与由其统一的诸部分之间的某种关系，而非一个“新数”。

然而，究竟是什么原因让柏拉图非要在以纯粹数学为地基的数学知识中贯彻计数单元的不可分割性呢？要回答这个问题，就需要跟随他一道进入理论数艺的领域，思考他为这门科学设立的一项核心内容：为什么多个纯粹的单元能够形成一个数或多者？确定数目的确定事物（*arithmos*）之统一性源自何处？

二、数的统一性与计数单元的不可分割性

实践数艺与实践算艺中涉及的数都是可感的三头牛、五条狗，而理论数艺中谈到的则是脱离了如牛、狗这类感觉对象的思想单元，即三个单元或五个单元。那么三个单元如何能够被名为“三”的数所统一呢？柏拉图认为，严格来说，这种统一不是单凭数学知识自身能够得到澄清的。诸理念之间展示出的一种特殊的“数艺关系”是解决上述问题的突破口。

柏拉图在《大希皮阿斯》中讨论了这样一个困难：“通常，若干事物共同具有的某个属性必然也属于它们中的每一个，以至于一个‘共通之物’（*koinon*）既同属于它们两个（就听与看而言），也属于它们各自。也还存在这样一种共通之物，它只属于若干事物，而不属于它们其中的每一个。”这个困难可以更为具体的表述为：“一个理念就其统一与整体而言，‘遍布’于分有它的多个事物当中，是何以可能的。”（[3]，pp.79–80）举例来说，谈及苏格拉底与希皮阿斯健康时，意味着他们各自都是健康的，各自因“分有”（*methexis*）了健康的理念而获得了理解。然而与此不同，当我们数出“二”时，“二”并不适用于理解被计数事物的“各自”。正如前文已述，被计数者各自是“一”，放到一起才是“二”。“二”似乎是某种脱离了单个事物或者说外在于单个事物的分离性存在。

通过对第二种共通之物进一步审视，柏拉图发现，“二”与“两个各自被计数单元”之间的关系非常特别，它与理念世界中“属”（genus）与“种”（species）间的分有关系十分类似。在《智

者》中，柏拉图提供了如下讨论：运动与静止存在，但不能说运动等于存在，因为这将预设静止不存在。同样，不能说静止等同于存在，因为如此，运动就被预设为不存在。那么，存在是否被说成在二者之旁或之外的第三者？显然这是不可能，因为这将预设运动与静止皆不存在。由此可以得出，存在依其本性不是静止或运动中的任何一个，而是它们两者的统一。与“二”是对两个数学单元的统一类似，存在作为“二”是对其下运动和静止这两个理念单元（eidetic monas）的统一。简言之，理念属种之间类似数艺结构的关系，完成了二（存在是二）对一（运动是一、静止是一）的统一，进而存在是以运动、静止为单元的理念数（eidetic number）“二”（TWO）。

必须要指出的，虽然理念数与数学中的数之间存在着某种相似性，但它们之间也存在着非常重要的差别。“数艺家处理的数，即数艺数或数艺单元，可以被合计，即被加起来，例如八个单元和十个单元在一起就恰好得到十八个单元。然而，理念的聚合（理念数）却并不形成任何彼此相关的‘共通体’（community）。它们的‘单元’全都是不同种的，只能被‘部分地’放‘到一起’，也就是说，它们只是碰巧属于同一个聚合，同时它们彼此间却是‘完全划分开的’，它们‘无法放在一起，无法比较’。”简单说来，在理论数艺中，思想内的单元都是彼此相等的，而被存在统一的运动与静止这两个理念单元之间则是绝对的相异。由此，理念世界中属种之间体现出的这个“数艺”结构就不能被称为是“数艺的”（arithmetical），而应称为“数理的”（arithmological）。（[3]，p.89）（[6]，p.51）

通过上述讨论可见，柏拉图区分出了三种数：“可感数”（*arithmos aisthetos*）、“数学数”（*arithmos mathematikos*）、“理念数”（*arithmos eidetikos*）。“可感数”是可感事物向灵魂的显现，是实践数艺、实践算艺所使用的对象。“数学数”则介于理念数与可感数之间，讨论的是纯粹的、没有变化的思想单元构成的独立领域。它们是理论数艺、理论算艺讨论的对象。“理念数”所涉及的则是高等级存在之间的相互关系，其相关讨论超越了理论数艺的内容，是转向后的灵魂在辩证法的阶梯上对本原的追问。“它在存在论上将理念界定为这样一种存在，理念依照它们独有的本性，彼此间建立起诸多关联，而这种存在就其自身而言完全是不可分割的。”（[3]，p.91）

更为重要的是，这三种数之间存在着依次奠基的关系：数学数是可感数的基础，而理念数则又是数学数的基础。这种奠基是通过分有达成的。相较于可感事物对理念的分有，更为根本的分有问题旨在考察理念之间建立共通体的可能性。理念数为解决这种存在论上的分有问题带来了希望。理念数与其单元之间的关系，恰似属与种之间的关系，如人类、马、狗都分有了动物这个高阶的属。需要注意的是，这种分有既没有切分这个属，也没有让作为单元的种失去各自的独有本性，它们依旧有着不可分割的统一性。“凭借各自的理念特征，每个理念数都是种类上唯一的，就好像它的单元不仅是统一的，而且是唯一的。”所以，“数之聚合体的统一性与确定性就植根于这理念内容之中。”（[3]，p.90）“数学数之所以有‘一性’，是因为它们是理念数的影象。”“理念数是任何数学数结构的典范，而不是相反。”（[6]，p.51）

现在让我们回到前一部分结束时的问题，是什么原因让柏拉图试图在以纯粹数学为地基的数学知识中贯彻计数单元的不可分割性呢？通过分析可以发现，数学数与其单元之间存在的分有结构，是对理念数的分有结构的模仿。由于构成理念数的理念单元具有绝对的“一性”，从而排斥任何被分割的可能，因此“‘分数’不过就是为计数提供基础的那个东西本身的零碎部分，这东西由于其有形本性（bodily nature）而可以被无限切分。另一方面，在‘纯粹’数的领域中，单元自身（unit itself）则提供了所有可能分割的最终界限：一切分割‘都将终止于一’。”（[3]，p.42）

三、亚里士多德“抽象理论”中的计数单元

“柏拉图的分离论题在数学中得到了最强有力的支持。”（[3]，p.100）包含在可感事物中彼此相反的性质以及数学特征都超越于有形世界而存在，以被分有的方式作为可感事物的能被述谓的一部分。特别是，作为纯粹数之本原的单元“一”和以“二”为始的数，都与感觉之物相分离，仅存在于可理解的世界当中。柏拉图认为，唯有设定理念与数学对象的这种分离性，关于可感事物的言说与理解才是真正可能的。然而，正是出于对分离理论的不满，亚里士多德在《形而上学》中对老师的观点展开了激烈批评，并以自己的实体理论重新解释了数学对象的存在样态和获得方式。他写道：

> 在何时、何种情况下，数学的多者（mathematical multitudes）才能成为一呢？凭借于灵魂或灵魂的部分，或其它什么理智存在，我们周围的诸多事物成为一（如果没有它们，事物则是杂多和支离）。……让我们设定它们（数学对象）在定义（articulation, *logos*）上是优先的，然而并非所有在定义上优先的东西，在实体（thinghood, *ousia*）上也优先。因为，那些在实体上优先的事物，当它们从其它事物中分离之后，在存在上要超越后者，而定义上在先的事物，是说其它事物的定义由这些定义构成，这些定义并不相互从属。比如属性，如以某种方式事物是（being）运动的和白色的，并非是说运动和白色是与个体事物（independent things）分离的存在。白色只是在定义上先于白人，而不是在实体上。因为白色不允许分离存在，而总是与复合的整体一同存在（复合的整体是说白人）。所以那些由抽象（taking something away, *aphairesis*）而来的东西显然并不在先，由增加而来的东西也不在后，因为我们就是增加了白色来说白人的。那么，已经充分说明了，数学事物并不比立体更是独立事物，也并不先于可感知的事物，而仅仅是在定义上先在，亦不能作为分离的东西存在于某处。（[7]，1077a23–b15）

亚里士多德的实体学说认为，存在（being）是在多种意义上言说的，但都围绕着一个焦点含义而展开。在枚举了焦点含义的备选项——合成物、质料、形式（是其所是、普遍者、属）后，[8]亚里士多德认为，唯有只被谓述，而不谓述任何其它事物，对个体事物自身同一性负责的“是其所是”，才是一事物之实体。以人们日常经验到的“白色的人”为例，首先它是由皮肤、肌肉、筋腱、骨头等质料组成的偶性复合体，同时就它是一个具体的人而言，又是一个个体。此外，“白色”“人”这两个普遍概念又可归为颜色、动物这两个属之下，不过他们都不是亚里士多德追问的实体。实体只能是那个超越谓述和语言，让个体诸部分得以聚合为一，并以特立独行的方式展示自身的那个东西，也即：“对于首要的和就其自身而言的东西，每一个东西的所是和每一个东西本身是同一的”。（[7]，1032a5–6）因此，实体与个体是相即不离的，因为“如果它们是彼此分离的，那么对于形式则没有任何知识，对于事物，也没有它的存在”。（[7]，1031b3–4）

那么，从实体理论为出发如何解释“为什么事物看起来相似”这一问题呢？在亚里士多德看来，相似并不是因为有一个涵盖一切存在者的最高阶的属，而是因为以“活动”（*energeia*）为存在样态的形式既是作用于质料生成个体事物的原因，也是塑造灵魂感觉和理解的原因。实体在个体的生成和认识过程中与形式、质料以及自然结合为一。因此，与鸡、人或者其它自然存在的形式一样，数学对象并不能脱离可感事物而分离存在，而只是在一种特殊的观看模式中被暂时凸显出来，被主题性地关注与考察。[9]对此，克莱因解释道：

> 我们如何能够将所有单个部分（我们在语言中逐一加以把握的一个事物的单个“成分”，例如“这个”“圆的”“白的”“柱状”）从它们由于其存在而嵌入的具体背景中抽离（extract）出来，分别对它们各自进行研究？很清楚，只有以这种方式：在每种情形中，我们忽略（disregard）被探究事物的某些属性，撇开将它们全部彼此联系起来的存在之脉络。这种“忽略……”能够产生一种新的观看模式，使某些东西得以在可感物中显明，尽管可感

> 物多变而短暂，这些得以显明的东西不再经历变化，而总是维持在相同的条件下，从而满足了要求，能够作为某一门科学、一种知识的对象。特别地，将可感物的数的方面（或维度）纳入一门明证的学科的可能性就建立在“忽略”每一种个别内容的基础上。……作为知识的对象，这些数学对象（即好像是从可感物中读取出来的立体几何的、平面几何的以及数艺的形成物）已不再从属于感觉，尽管它们并未获得任何独立的存在，即与可感物的存在并列的一种存在。（[3]，p.102）

这种从可感物中，通过调整观看模式得到“共通之物”的灵魂运作方式，被亚里士多德称为“抽象”或“抽离”。

正是以此为基础，在坚持实体个体本质的整体框架下，亚里士多德消解了柏拉图将计数单元解释为独立于可感物存在的纯粹可思之物的分离理论的基础，并进而否定了理论数艺中诸单元之统一性的基础：理念数之数理结构。首先，对亚里士多德而言，计数单元之所以“纯粹”不再是由于它们独立于可感物而存在，而在于它们可以同等地作为尺度，由灵魂运用于对可感物的计数当中，即，单元具有相对于可感物的“中立性”。同时，计数单元的统一性也不源自于被理念数统一其下的每个种的唯一性和独特性，而是来自于单元作为尺度这一特征。（[3]，p.108）其次，借助于抽象理论，亚里士多德实际上否认了作为数的若干事物有任何“统一性”。数是灵魂在计数活动中均一地将单元尺度运用于被数事物时所得的一个又一个的累加，即“数是由单元量度出的多者。”（[7]，1057a4）“诸物‘是一’，标记出它们是可被计数的，由于这一点，也仅仅由于这一点‘是一意味着不可分割’。”（[3]，p.108）因此，“一个数唯一可能的‘一性’就是服从于计数过程的单元的‘一性’。六个苹果的‘一性’是‘苹果’。”（[6]，p.53）

以上述澄清为基础，本小节开篇所引文本就包括了如下几层含义。第一，为个体事物聚合与统一负责的是实体，它具有绝对的存在优先性。第二，数学对象和其它种、属都依赖于可感的复合事物，不能独立存在。第三，包括数在内的数学对象，源自于灵魂对于个体可感事物某些数学特征的抽象。数和诸多事物所体现出的统一性，并不由分离的理念世界来保证，而来自灵魂的理性部分。

上述亚里士多德对柏拉图计数单元不可分割性的形而上学批评有着深远的影响。首先，柏拉图在数的知识之间建立的四重划分及其奠基顺序显得繁复且没有必要，因为计数单元的统一性根本无需提升到理论数艺领域讨论，灵魂对单元的尺度性运用就解释了单元的一性。分离命题和理念数体现的数理结构也因而显得多余。其次，数学对象以及一切可能的认识对象不再是与可感世界分离的可知世界的存在物，而成为了某种灵魂与个体事物之间的“居间”性存在。关于这些对象存在样态的讨论为中世纪和近代早期哲学提供了重要的思想资源。更为重要的一点是，被理解为尺度的单元淡化了对其不可分割性的排斥，为一种涉及分数使用的计算科学提供了存在论上的支撑。“就每一次计数都预设了一个实际单元领域而言，数学单元是‘不可分的’，但我们总是可以改变单元，不是从整个事物，而是从整个事物的部分中抽象出它们。”（[6]，pp.52–53）

四、作为计数尺度的单元与分数的出现

回到分数问题上。实践中的精确计算的确可能会要求引入计数单元的零碎部分用于计算，但是，如前所述，对计数单元这种分割只能是基于可感数的有形质料，不可能在数学数的领域中进行。因此，在柏拉图的四重划分中，这样的精确计算就不可能属于理论算艺的研究范围，只能归入实践算艺。这就向柏拉图传统提出了一个难题：如果说旨在为实践算艺奠基的理论算艺只是一门研究数之间的各种关系的科学，那它是否足以为实践算艺中的“分数”计算提供可理解性基础呢？（[3]，p.43）

克莱因认为上述难题在柏拉图主义传统中并未得到很好的解决，这在欧几里得《原本》中就有体现。欧几里得这部集大成之作无疑继

承了柏拉图学派数学家的成果，其中第十卷关于不可公度量的内容大部分源自泰阿泰德。[10] 而紧接在这一卷之前的第七、八、九卷则形成了一个相对独立于前六卷的整体，专门处理数（而非几何量），为第十卷提供了必要的前提。这三卷的绝大部分内容正是理论算艺要研究的纯粹数之间的各种关系，为不限于加减的各种计算提供了基础。然而，正如前文所述，分割单元的理论基础不可能在《原本》中找到。这三卷论及的“被度量”“部分”“成比例”等各种关系都不足以充当分数及其计算的可理解性基础。这些内容跟理论数艺关于数的类型的研究衔接得比较好，但不足以为理论算艺奠基。正是在这样的背景下，理论算艺丧失了自己的地位，“计算”被完全归入实践科学的领域，而关于数的关系的知识则被归入数艺，或归入和音学基于数之比的音程研究。柏拉图的四重划分就这样逐步缩减为新柏拉图主义的二重划分。（[3]，pp.43–44）

丢番图那部现在被译为《算术》的著作，虽然内容都是如何求解各种计算问题，但标题却是“数艺”（*Arithmetica*），整部著作从内容到形式都按照理论学科的方式撰写，所涉及的单元都是“纯粹”单元，但又处处用到单元的零碎部分做计算。这与新柏拉图主义对单元的存在方式的理解并不相容，只有在亚里士多德式的理解下才是可能的。（[3]，pp.132–133）只有把单元理解为尺度，才可以像《算术》中那样，把单元的某个部分拿来倍增而重新得出原来的那个单元（第一卷定义5），还可以把原来的单元的某个部分通过变更尺度转换成一个新的单元。（[3]，pp.137–138）例如第一卷问题23，在得出所求的四个数为150/23，92/23，120/23，114/23之后，就立刻把1/23提升为新的单元，将答案重新表达成150，92，120，114这四个数；又如第四卷问题34最后将答案33/12，7/5，68/12重新表达为165/60，84/60，340/60。像这样的尺度变更在《算术》中频繁地实施。正因为这样的单元转换总是可能的，丢番图才得以将单元的部分、单元本身和数都同等地用在同一个计算过程中，而不必担心这样做是否会使单元失去一性。

在不断重复的尺度变更中蕴含着一种可能性，那就是单元的部分、单元本身和数这三种东西现在有可能被当成存在方式相同的东西来对待了，甚至有可能把它们置于同一序列中。例如扬布里柯（Iamblichus）说单元构成了“数与零碎部分之间的分界线”，对他这句话的一条匿名注疏则说丢番图也是如此，因为在丢番图那里，“零碎部分无止境地减小下去”。（[3]，p.137）这似乎是认为单元的部分形成了一个自己的领域，与数的领域相当，而且是数的领域在1以下的延续。丢番图虽然没有明确表达过这样的想法，但鉴于他在大部分问题的答案中直接写上了单元的部分，偶尔还写上了单元本身，可以推测他对上述想法并不会感到难以接受。（[3]，pp.138–139）

是否可以说这预示了分数概念的诞生？需要注意的是，这并不意味着丢番图的数已经包含了今天说的有理数。在他这里，“数”的意思依然是“若干个确定的事物”，他的“分数”只不过是把其中作为单元的事物替换成了某个“零碎部分”，7/5对他而言仍然是7这个数，只不过其单元是那个“与5同名的部分”。要让“分数”的意思变成今天说的“非整数的有理数”，还需要“数”本身的意义发生根本的转变。（[3]，pp.136–137）这一转变正是克莱因《起源》一书后半部分要揭示的主题——数在近代以后转变为不再指向确定事物的符号，亚里士多德的抽象也被替换为“生成符号的抽象”。这一洞见与胡塞尔在《欧洲科学危机与先验现象学》（简称《危机》）中对近代科学数学化特征的反思密切相关，也是克莱因对“现代理性主义”展开批判的基本出发点。克莱因这部分工作至关重要，将另文阐述，在此仅需指出，对这部分工作的理解必须建立在充分理解《起源》前半部分的基础之上。

结　语

在通常的数学史研究中，数学对象的存在本身被当作理所当然、不成问题的，研究者总

是默认了所考察的数学对象在历史中永远以同样的方式存在，变化的只是人们对它们的“认识”“表达”和“实作”，由此产生的叙事只不过是罗列关于发现、再发现和传播的时空事件，尝试刻画客观时间中的事件因果序列，数学对象的意义及其起源问题实际上被遮蔽。

这种无视对象“作为……而存在”的多样性，从而囿于因果描述的编史思路本身恰恰根源于克莱因所揭示的近代符号性抽象方式。在“现代理性主义”“现象学与科学史”和“历史与自由技艺”等文章中，克莱因指出，以笛卡尔为开端的近代数理科学和以维柯为开端的近代历史科学有着共同的根源，也就是笛卡尔“普遍数学”背后的符号性抽象。（[6]，pp.58–64；p.71、129）这种迥异于古代抽象的近代抽象方式要求将每个事物的各种“作为……”逐一剥除，将最终剩下的唯一一种存在方式视作与该事物的本质相关，而将其余的“作为……”都视为衍生的、非本质的，从而不予理会。现代理性主义企图由此达到一种超越于个体的人、超越一切族群和一切文化的永恒的普遍性，但结果却是抽空了事物的价值和意义，使事物脱离于人自身及其实践与传统。这种抽象方式在近代历史科学中的体现就是使得历史本身被图像化，如同海德格尔所揭示的近代数理科学使得世界本身被图像化、人被抽离于世界之外那样，近代历史科学也切断了人与其自身传统之间的历史纽带，代之以抽象的“发展进步”，并试图通过描绘事件的因果序列来体现这种抽象的历史进程。

如果一直囿于这种因果叙事，就很容易误解克莱因的工作。例如误认为克莱因是要论证柏拉图为数的统一性的存在论奠基从形而上学层面上否定了分割计数单元的可能性，从而阻止了希腊数学家在计算实践中使用分数，因而批评克莱因将希腊数学的实际历史进程置于形而上学的“过度决定”之下。（[5]，pp.192–194）

然而克莱因真正要探究的是，柏拉图和亚里士多德的工作如何揭示了各种数学传统的不同存在论基础，哲学探究通过重新理解、重新激活这些基础而生成新的意义，为数学研究开启新的可能性。新意义的沉淀固然会遮蔽某些旧的意义，令原有的某些可能性被遗忘，但是一方面，意义沉淀并不发生在哲学家的独自思辨当中，而是在数学的实际研究中逐渐完成，另一方面，被遮蔽的旧的意义虽被遗忘但也不会完全消失，仍然可以通过回溯找回并重新激活。因此，哲学探究对存在论基础的揭示和重新理解并不决定或限制数学家的工作，而只是敞开了更多可能性，并且无论哪种可能性都要由实际的数学研究去实现。克莱因在《起源》中的探究本身也是对层层意义沉淀掩埋下的各种存在论基础的回溯和重新激活，以克服近代符号性抽象造成的遮蔽，为当下和未来开辟更多可能性。

如果不理解克莱因这一根源性的研究思路，就会把他的工作（以及柯瓦雷等类似的思想史研究）误解为“哲学决定实践”，当成一种陈旧过时的编史思路加以排斥，看不到这种溯源工作的必要性。即便数学史研究转向了所谓的“数学实践”或“数学实作”，但只要它还继续无视使得具体数学实践成为可能的存在论基础，那它也只会将数学实践抽象为时间因果序列中的事件加以罗列，最终跟只知罗列成果的旧式数学史研究一样贫瘠无果，沉溺于空乏的符号游戏，将自身隔绝于一般历史学和思想史研究之外，看不到数学史研究原本应该且能够为现代人理解自身的历史境遇做出重大贡献。

克莱因的研究植根于胡塞尔晚期的历史现象学。在“现象学与科学史”一文中，克莱因将胡塞尔先验现象学的核心任务概括为探究一切事物的真正根源，也就是每一个事物作为一个意义单元是如何被构成的。克莱因恰当地指出，这项任务从一开始，也即胡塞尔早期的逻辑研究追问数学对象的形式化何以可能时，其实就已经蕴含了历史问题，对意义的构成性起源的追溯必然引出一种特殊的历史，即“意向历史”。（[6]，pp.65–84）胡塞尔晚期的《危机》和《几何学的起源》正是要处理意向历史与实际历史之间的关系，这代表着先验现象学走向

成熟，成为历史现象学。胡塞尔将历史揭示为“原初的意义构成和意义沉淀的共存与交织的生动运动”，并将意向历史的探究方式形容为“沿‘之’字形道路前进和回溯”，既从历史发展的结果出发回溯其根源，又从开端出发向前理解当下，“对开端的理解与对发展的理解相互促进”。[11] 克莱因实质性地推进了胡塞尔这一未竟的探究工作，从历史现象学发展出一种现象学式的历史学。相比于同样受到胡塞尔启发的柯瓦雷，克莱因的《起源》更为准确地切中了意向历史与实际历史相衔接之处，细致地展现了数学形式化的实际历史背后的原初意义构成和意义沉淀的交织，超越了胡塞尔和海德格尔对形式化问题的理解。（[12]，pp.289–290）克莱因这一工作的深刻意义和巨大潜力直至今日尚未得到充分理解，有待继续探讨。

［参 考 文 献］

[1] Heath, T. *A History of Greek Mathematics*[M]. Vol.1, New York: Oxford University Press, 1921.

[2] Fowler, D. *The Mathematics of Plato's Academy: A New Reconstruction*[M]. New York: Oxford University Press, 1999.

[3] Klein, J. *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*[M]. Brann, E. (Trans.) New York: Dover Publications, 1992.

[4] Plato. *The Republic of Plato*[M]. Bloom, A. (Trans.) 2nd ed. Basic Books, 1968.

[5] Majolino, C. 'Splitting the Monas: Jacob Klein's Math Book Reconsidered (Part I)'[A], Hopkins, B., Drummond, J. (Eds.) *The New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy*[C], Vol.11, Acumen Publishing, 2012.

[6] 雅各布·克莱因. 雅各布·克莱因思想史文集[C], 张卜天 译, 长沙: 湖南科技出版社, 2015.

[7] Aristotle. *Metaphysics*[M]. Sachs, J. (Trans.) Sante Fe: Green Lion Press, 1999.

[8] 聂敏里. 存在与实体: 亚里士多德《形而上学》Z卷研究（Z1–9）[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2011, 124–126.

[9] Hopkins, B. *The Philosophy of Husserl*[M]. Durham: Acumen, 2011, 60.

[10] Katz, V. *A History of Mathematics: An Introduction*[M]. 3rd ed. Pearson, 2009, 427; 449.

[11] 胡塞尔. 欧洲科学的危机与超越论的现象学[M]. 王炳文 译, 北京: 商务印书馆, 2001.

[12] Hopkins, B. 'The Philosophical Achievement of Jacob Klein'[A], Hopkins, B., Drummond, J. (Eds.) *The New Yearbook for Phenomenology and Phenomenological Philosophy*[C], Vol.11, Acumen Publishing, 2012.

［责任编辑　王大明　柯遵科］