·人物评传·

弗赖登塔尔：数学教育科学的奠基人

Hans Freudenthal: The Founder of the Science of Mathematical Education

屈美玉 /QU Meiyu　　刘鹏飞 /LIU Pengfei　　胡卓群 /HU Zhuoqun

（吉林师范大学数学教育与数学史研究中心，吉林四平，136000）
(Center for Education and History of Mathematics, Jilin Normal University, Siping, Jilin, 136000)

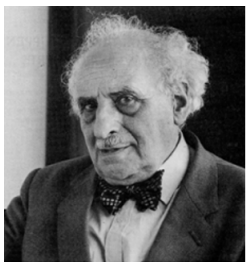
摘　要：汉斯·弗赖登塔尔是20世纪荷兰一位在数学和数学教育领域均有深入研究的全能学者。在纯数学上，他的研究兴趣为拓扑学、代数学、几何学等；作为数学教育家，他创办了《数学教育研究》期刊，组织了国际数学教育大会等，他的一系列教育主张在今天仍有十分积极的指导意义。除此之外，他在数学史领域也有涉猎。

关键词：汉斯·弗赖登塔尔　拓扑学　几何与李群　数学教育

Abstract: Hans Freudenthal was an all-round scholar of mathematics and mathematics education in Holland in the 20th century. In pure mathematics, his research interests are topology, algebra, geometry, etc. As a mathematics educator, he founded the journal *Educational Studies in Mathematics*, organized the International Congress on Mathematical Education, etc. And his series of educational propositions still have very positive guiding significance today. He also dabbled in the history of mathematics.

Key Words: Hans Freudenthal; Topology; Geometry and Lie Group; Mathematics Education

中图分类号：K811;G623.5　　**文献标识码：**A　　DOI: 10.15994/j.1000–0763.2024.03.014



汉斯·弗赖登塔尔

汉斯·弗赖登塔尔（Hans Freudenthal，1905–1990）作为著名数学家，早年专注于拓扑学研究，后来又转而研究几何学与李群，且在数学教育领域给世人留下极为深刻的研究成果，成为数学教育科学的奠基人。

一、弗赖登塔尔的纯数学研究

1923 年，18 岁的犹太学生弗赖登塔尔进入柏林大学学习数学和物理。数学老师有霍普夫（H. Hopf）、比伯巴赫（L. Bieberbach）、施密特（E. Schmidt）、冯·诺依曼（J. von Neumann）、洛纳（K. Löwner）等，其中对弗赖登塔尔影响最深的是霍普夫与洛纳，霍普夫

收稿日期：2022 年 6 月 23 日；**返修日期：**2023 年 11 月 27 日

作者简介：屈美玉（1998–）女，吉林农安人，吉林师范大学数学教育与数学史研究中心硕士研究生，研究方向数学史。
Email: qumeiyu163@163.com
刘鹏飞（1979–）男，吉林辽源人，吉林师范大学数学教育与数学史研究中心兼职教授，研究方向为数学史。
Email: pfliu@jlnu.edu.cn
胡卓群（1999–）男，吉林扶余人，吉林师范大学数学教育与数学史研究中心硕士研究生，研究方向为数学史。
Email: huzhuoqun9910@163.com

的影响主要在拓扑学，洛纳则在李群和直觉主义方面深刻启发了他。[1]

1927年，两件大事改变了弗赖登塔尔此后的人生走向。其一，荷兰数学家布劳威尔（L. E. J. Brouwer）于1926年、1927年相交之际在柏林大学的演讲，使得弗赖登塔尔进一步接触了直觉主义。布劳威尔从事拓扑学研究，后期转向数学基础；前者源于他对几何学的热爱，而后者直接致使他提出直觉主义数学哲学。随后的几年里，弗赖登塔尔经常同布劳威尔探讨，布劳威尔也会将自己的研究成果与他交流；其二，1927年夏天，弗赖登塔尔赴巴黎大学学习，听了阿达玛（J. Hadamard）等人的讲座，回国后在数学学院获得助理职务，这在很大程度上拓宽了他的视野和兴趣范围，进而使他对博士论文有了初步构思。

弗赖登塔尔以拓扑学为题做博士论文，除潮流因素影响外，是因他在自己导师——年轻的数学家霍普夫，以及另一位数学教授施密特身上得到启发。事实上，施密特是最早研究和理解布劳威尔论文的人，致力于宣扬布劳威尔的学说。霍普夫第一次接受布劳威尔的理论，就是听了施密特1917年一场关于“布劳威尔证明维度不变性”的讲座。施密特在1920年前后激发许多年轻人对拓扑学的兴趣，霍普夫是其中的佼佼者。霍普夫影响了弗赖登塔尔的研究取向，此后，弗赖登塔尔对霍普夫的钦慕始终不减，二人保持多年的良好友谊。

弗赖登塔尔的博士论文，研究拓扑空间和拓扑群端点问题。在弗赖登塔尔的紧集理论中，原始空间中被紧集分割的部分仍被同一紧集分割。文章第一个目标是把这个简单的直觉观点建立在坚实基础上。此外，他还证明局部紧群有0个、1个或2个端点，其中“0个端点”仅在紧性条件下出现。[2]

1930年，弗赖登塔尔通过博士论文答辩，答辩组由比伯巴赫担任主席。但直到1931年论文被一家期刊收录后，学位才正式授予，此前他已接受布劳威尔邀请担任助教，投奔布劳威尔并非受到直觉主义吸引。相反，完全是拓扑学兴趣驱动，尽管那时布劳威尔的主要研究兴趣已不在拓扑学上，接纳弗赖登塔尔则是出于对其直觉主义观点的欣赏。布劳威尔所在的阿姆斯特丹大学，因纽曼（M. H. A. Newman）、乌雷松（P. Urysohn）、亚历山德罗夫（P. S. Alexandrov）等数学大师先后访问、交流工作，而成为拓扑学胜地。弗赖登塔尔在这学荷兰语，并很快可熟练写作，写作风格独特。[3]

1934年，布劳威尔创立《数学集刊》（*Compositio Mathematica*）杂志，弗赖登塔尔在布劳威尔指导下负责它的日常工作，后来逐渐转变为弗赖登塔尔自主管理。布劳威尔仅在名义上是期刊负责人，弗赖登塔尔虽不是教授，也未被列入编委名单，但大部分工作都是弗赖登塔尔做的，他是期刊事实上的主编。

在阿姆斯特丹大学，弗赖登塔尔结识同为犹太人、又同为布劳威尔助教的数学家胡列维茨（W. Hurewicz），他的同伦论研究启发弗赖登塔尔在“双角锥”上的工作，[4]二人合作过同伦论文章。

胡列维茨将庞加莱提出的“基本群”概念从一维推广到了高维，后来又得出“在序大于或等于2的零伦空间中，同伦群完全由基本群决定”。而这个结果是后来发展起来的数学分支——同调代数的萌芽之一。1937年弗赖登塔尔引入“同纬映射”，巧妙解决当时同伦论的计算问题：将不同维球面不同维同伦群联系起来、发现稳定同伦范畴、通过同纬映射研究同伦与同调（上同调）的关系，[5]证明了对于n维球面S^n，有

$$\pi_i(S^n, p) = \begin{cases} 0, i < n \\ \mathbb{Z}, i = n \end{cases}$$

这个理论为$\pi_3(S^n, p)=\mathbb{Z}$提供了另一个非常简洁的证明，使得人们的注意力集中在球面的同伦群上。在这之后，弗赖登塔尔又在胡列维茨的基础上，得到一个更显著的结果：当i≤2n–2时，$\pi_i(S^n)=\pi_{i+1}(S^{n+1})$（忽略基点）。或可以写成：当d≤n–2时，令i=n+d，则有$\pi_{n+d}(S^n)=\pi_{n+d+1}(S^{n+1})$。这个结果表达了同伦群的某种稳定性：当一个球面的维数超过某个固定值，它的同伦群保持不变。[6]因此，我们完全可以说，同伦论实际上是弗赖登塔尔和胡列

维茨共同创造和发展的。很久以后，人们又发现了更多相似类型的稳定性结果。到了50年代，人们又推动了这个课题的研究进展。

总地来说，在1941年以前，弗赖登塔尔的生活过得相当愉快。他在这段时间同苏珊娜（S. J. C. Lutter）女士结了婚，苏珊娜出身工人家庭，但她的家庭却很开明地允许她接受了良好的教育。她不是犹太人，夫妇两人育有四个孩子。几年后，德国占领了这个国家，《数学集刊》被迫停办，弗赖登塔尔也于1941年被停职，不得不过上了颠沛流离的生活。此时，弗赖登塔尔数学研究已扩展到殆周期函数、李群、代数拓扑、泛函分析和直觉主义等领域。[7]-[10] 他的名字很快为国际数学界所熟知。

纳粹上台大肆迫害犹太人时，弗赖登塔尔正在荷兰从事研究工作。迫于纳粹政治压力，许多犹太科学家不得不离开欧洲，前往美国等地，胡列维茨就是其中之一，但弗赖登塔尔却选择留在荷兰，战争没能阻挡他对数学的热情。他不定期与霍普夫通信，还在战乱期间写了两篇和霍普夫有关的论文："关于离散空间和群的端点"[11]"基本群对贝蒂群的影响"。[12] 战争期间，他创作了一些不错的文学作品，还获得过一次为被迫停学的犹太学生教授数学的工作，但也只做了一年。幸运的是，因为他妻子的种族，也因为她的机智周旋，使得弗赖登塔尔几次在纳粹的迫害下脱身，甚至从盖世太保监狱中死里逃生。

1945年5月，弗赖登塔尔恢复在阿姆斯特丹大学的教学和研究工作。1946年，乌得勒支州立大学理学院向他抛出橄榄枝，请他全职出任几何学教授一职。相对于在阿姆斯特丹大学评教授职位的遥遥无期，他接受了乌得勒支州立大学的邀请，并搬到乌得勒支。

1872年克莱因（F. Klein）提出"爱尔兰根纲领"以来，几何学与其对称群间的精确联系，被作为数学研究的主题。在乌得勒支，形成一个重点研究几何学和李群的"乌得勒支学派"。在讲授多年射影几何基础上，弗赖登塔尔对该主题产生浓厚兴趣。他关注的问题之一是：李群的拓扑结构与其抽象群结构之间的关系。这个问题与"给定一个抽象的李群同构，在什么条件下它是解析的"密切相关。

例如，观察复数的任意域自同构 Φ: $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$，通过将其应用于矩阵元素，将得到群 $SL(n,\mathbb{C})$ 的一个自同构。由于复数域存在高度不连续的自同构，因此存在 $SL(n,\mathbb{C})$ 的不连续抽象群自同构；$SL(n,\mathbb{C})$ 和 $SP(n,\mathbb{C})$ 也有类似的现象。从而，弗赖登塔尔证明了复单李群的实形式的同构必然是解析的。这个结果再一次被搁置了很长时间，直到70年代才被重新提起。[13]

弗赖登塔尔始终对《数学集刊》念念不忘，最终在他的奔走下，期刊在20世纪50年代得以重新开办，并由他亲自担任编委。1970年，他亲自创办另一份纯数学期刊——《几何学报》（*Geometriae Dedicata*），直到1981年他都担任主编。他在乌得勒支大学一直待到1976年退休，在乌得勒支的几十年里，除纯数学研究外，他把主要精力集中在数学教育领域，尤其是在20世纪60年代以后。

二、弗赖登塔尔的数学教育贡献

弗赖登塔尔最令世界瞩目的成就，主要是在数学教育领域。他自己描述做数学教育研究的初衷非常简单："我一生都是做教师，之所以从很早就开始思考教育方面的问题，是为了把教师这一行做好。"他担心数学教育落后于数学的发展，开始围绕数学的历史和文化基础分析问题。弗赖登塔尔坚持认为数学问题由数学家解决，而数学教育问题则应由教育的参与者，即教育工作者和受教育者来解决，数学教育的主要问题即是教育的主要问题。[14] 这一基本观点贯穿弗赖登塔尔数学教育研究的始终。

1. 弗赖登塔尔独到的教学方法

20世纪30年代，尽管布劳威尔的研究兴趣已由拓扑学转为直觉主义，但胡列维茨和弗赖登塔尔都认为给他做助教是种荣誉，也是挑战。他们获得了"私人讲师"的职位，这个工作没有底薪，收入多少完全取决于选他们课的学生人数。二人讲授过代数场论、群论、测度论、复分析、拓扑、线性算子等课程。弗赖登塔尔

工作的一个显著特点是，他强调拓扑学、代数和分析等不同学科之间的相互作用，他的同事1975年高度评价他："几何学家弗赖登塔尔在阿姆斯特丹教授分析，在乌得勒支教授代数。"[15]

胡列维茨出走美国时，1937年的阿姆斯特丹大学还有两位数学教授退休。原来教授几何和分析课程的重担，就交到弗赖登塔尔和另一位同事海廷（A. Heyting）手中。海廷负责几何和代数课程，弗赖登塔尔负责教授分析学课程。

弗赖登塔尔对传统的授课方式做出了很大的改变。第一年和第二年的课程，有些符合布尔巴基学派的精神。数的概念从自然数皮亚诺公理，发展到实数和复数范围。在处理幂级数和达朗贝尔对代数主要定理的证明中，弗赖登塔尔从不回避将数系扩充到复数域，并从一开始就使用集合语言，引入度量空间作为分析中一些基本定理的自然背景；多变量分析是在赋范（有限维）线性空间框架内进行的。弗赖登塔尔还引入微分形式，证明广义斯托克斯定理，以勒贝格积分理论结束这门为期两年的课程。

这种抽象的方法确实给学生理解造成一定困难，但也令那些年轻人们印象深刻。随后的几年，弗赖登塔尔还为学生们开设了复变量理论、微分方程（常微分方程和偏微分方程）、泛函分析（巴拿赫空间、谱定理、遍历定理、殆周期函数）等课程。课余时间，海廷和弗赖登塔尔还经常以自己感兴趣的话题为基础做演讲：海廷喜欢讲直觉主义，弗赖登塔尔喜欢讲拓扑学。

2. 弗赖登塔尔的数学教育研究

处于工业化大浪潮和一战后创伤之中的荷兰，对数学和科技越来越重视。但人们显然更注重数学的实用价值。为扭转这种根深蒂固的观念，许多数学家、数学教育家起到推动性作用。在第一次和第二次世界大战之间，人们进行数学教育和教育的广泛讨论。他们以报刊为阵地发表观点，形成百家争鸣之势。当时争辩的论题包括但不限于：数学的形成价值问题和数学史在数学教育中的推动问题；"空间的直觉和逻辑推理哪一个是几何学的基础"问题；对于当时还是数学分支的力学，究竟是将力学纳入实验物理中，还是通过公理形式力学引入数学；数学教师的培训问题。[16]

1936年，随上述有争议问题的逐渐演化，31岁的弗赖登塔尔在荷兰组织成立"数学教育研究小组"（WVO），旨在促进世界范围内的教育教学改进与改革。WVO负责组织定期会议，讨论教学法、数学教育方法等问题。二战前，WVO成员主要关注几何教育和从小学到中学的过渡问题。[17]战争爆发使WVO的活动被迫终止，但弗赖登塔尔还是利用在家里教两个儿子的机会，思考很多教育问题。战后WVO很快恢复正常工作，在荷兰数学教育改革的持续讨论中发挥作用。正是通过这个战后工作组，弗赖登塔尔在数学教育领域成名。他不光在数学教育和数学教学法领域发表观点，并能够将自己的理论付诸实践，同时通过实践的反馈来改进自己的思想。

1967年，弗赖登塔尔正式担任国际数学教育委员会主席，并于1968年和妻子苏珊娜创办杂志《数学教育研究》（*Educational Studies in Mathematics*），这是一个真正致力于数学教育研究的国际化刊物，影响力至今不衰。弗赖登塔尔的另一个革命性的创新，是组织了首届国际数学教育大会（ICMI），为全世界数学教育工作者提供了交流平台。组织这项大会的初衷是弗赖登塔尔等人感到原来的国际数学家大会，已不能满足数学教育的飞速发展需求。国际数学教育大会每四年举办一次，1967到1971年间，弗赖登塔尔担任国际数学教育研究会主席。1971年，他又参与创建乌得勒支数学教育发展研究所（IOWO），并被任命为第一任所长。该研究所于1981年并入乌得勒支大学数学和计算机科学学院，1991年9月更名为弗赖登塔尔研究所。

弗赖登塔尔根据自己对数学教育的理解阐述观点，形成一系列文章和书籍。他非常不赞同美国的"新数运动"，并力促荷兰开始新的数学教育改革。退休之后十多年里，弗赖登塔尔仍保持数学教育研究习惯，人们几乎每天都可以在研究所里看到他。他一生撰写100多篇学术论文。除此之外，还撰写了数学教育著作《作为教育任务的数学》（1973）、《除草与播种——数学教育科学的序言》（1978）、《数学结构的教

学现象学》(1983)。

《作为教育任务的数学》一书集中反映弗赖登塔尔的主要数学教育观点，包括人们熟悉的“现实数学”“数学化”“再创造”等理论。“现实数学”是指数学来源于现实，也扎根于现实，并且应用于现实。这是弗赖登塔尔数学教育理论的出发点。[18]从数学的发展历史来看，不管是数学概念，还是数学定理与公式，都是基于现实世界需要而一步一步形成的。[19]弗赖登塔尔的基本教育信念是，将数学看成一种人类活动，[20]所以他不只着眼于寻找和解决问题，更关注从真实情境和在数学范畴本身整理学科知识的活动过程。[21]这其中寻找合适情境的方法又被他称为“教学现象学”，并逐渐演变为一种独立于各种问题情境，可供高层次形式数学思考的数学模型。[22]数学作为现实世界人类经验的系统化总结，要求数学教学必须联系日常生活实际，注重培养和发展学生从客观现象找出数学问题的能力。用数学方法组织现实世界的过程也就是“数学化”。“再创造”是他数学教育理论最核心的部分，它建立在数学是人类的一种活动基础上。数学发展的历程应在个人身上重现，但不是机械的重复。他反复强调学习数学唯一正确的方法是实行再创造，教师的任务是引导和帮助学生去进行这种再创造的工作，而不是把现成的知识灌输给学生。

《除草与播种：数学教育科学的序言》一书是弗赖登塔尔思考数学教育作为一个学科领域的奠基性著作。作为对数学教育科学的基础理论研究尝试，弗赖登塔尔从科学、教育、教育科学，进而讨论到数学教育科学，分析各自之间的区别、联系，以及它们相应的哲学基础，特别强调数学教育科学必须从研究特定数学内容的数学理论出发，绝不是将一般的教育理论用之于特殊的数学领域。他还在书中阐述科学、教育、数学教育与社会、人类文化之间的密切联系。[23]

《数学结构的教学现象学》一书，弗赖登塔尔首次正式提到“教学现象学”这一术语，他认为数学概念、结构和思想是用来组织物理、社会和精神世界现象的工具。数学概念、结构或思想的现象学，描述了它们与现象的关系，它们是为这些现象而产生的，并在人类的学习过程中被延伸到这些现象。就这种描述所涉及的学习过程而言，就是向老师展示学习者可能进入人类学习过程的地方，是教学的现象学。他认为概念是我们认知结构的支柱。概念并不是一种教学科目，而是一种精神对象和精神活动。如果从教学角度可行的话，那么，精神对象和活动的教学范围，以及意识概念化的开始就是这一现象学的主题。[24]

3. 弗赖登塔尔的数学史研究

弗赖登塔尔对几何学的历史非常感兴趣，20世纪50年代后期，继施密特、外尔（H. Weyl）等人之后，再次研究了1900年前后的几何学文献，着重分析了希尔伯特（D. Hilbert）的《几何基础》，讨论书中主要理论的发展史。在他看来，正是由于希尔伯特的工作，现代数学才完成公理化转变。《几何基础》最关键的是希尔伯特对与几何相关的当代哲学问题的态度。[25]他特别肯定希尔伯特对几何学基础的创新方法，并未机械延续前人秉承的“从经验中推导或证明几何学公理”的理念，[26]也不拘泥于将几何学放在狭隘的真实空间内，而是坚持认为几何学基础研究，是对公理系统间逻辑关系的研究。弗赖登塔尔虽肯定希尔伯特的贡献，但认为他的方法过于笨重，充斥着不必要的复杂。他阐述了令希尔伯特理论体系更简洁的方法。这一批评激怒同时代的学者，博特马（O. Bottema）认为他缺乏基本的“敬意”。[27]

弗赖登塔尔虽然做了大量数学史研究工作，为《科学传记词典》撰写的文章涉及柯西、霍普夫、黎曼、舍恩弗里斯、惠更斯、莱布尼茨等知名数学家。[28]但他并不喜欢以“数学史家”自居，他喜欢以数学家的身份写作，他对数学历史发展的看法无疑是进步的，他不惮于评判早期著名数学家成就，且主要基于两个标准评价前人：他们论点的数学质量和他们接受现代进步数学观点的意愿。弗赖登塔尔对《几何基础》的历史研究，已成为研究19世纪和20世纪几何学史的重要参考。

4. 弗赖登塔尔在中国

1980年，弗赖登塔尔在第四次国际数学教育大会上发表演讲《数学教育的主要问题》，被翻译成多国语言广为传播，他的数学教育观念逐渐走入各国研究者视野。1986年，华东师范大学陈昌平、张奠宙、唐瑞芬等人成立数学教育教研室。他们在一本国际刊物上了解到弗赖登塔尔的教育学思想，大受震撼，于是产生邀请弗赖登塔尔来华讲学的想法。[29]

1987年，弗赖登塔尔来到中国，尽管当时中国的数学教学方式在他眼里十分奇怪，但他还是非常乐意向中国学者展示自己的想法。[30]他在华东师大做了6场报告和演讲，参会者除华东师大的教师外，还包括其他高等院校和中学数学教师。这无疑给当时的中国数学教育界带来最为前沿的国际信息。在上海的三个星期，华东师大授予他名誉教授称号。但非常遗憾，虽然中国学者抱有极大热情学习他的数学教育思想，但由于当时中西方巨大差异，中国学者并未完全理解弗赖登塔尔的讲座内容。两年后，弗赖登塔尔研究所的凯特尔（C. Keitel）访华时，中国学者还请他“解释弗赖登塔尔”。与大多数学者相反的是，弗赖登塔尔将自己所遇到的“不被理解”解释为一种义务和挑战，即重新审视自己的数学教育理念，并寻求更好、更全面的表现。[31]上海之旅结束后，弗赖登塔尔又应邀到北京。回国后，弗赖登塔尔将在中国的一系列演讲文稿整理成文集《数学教育再探——在中国的讲学》。可以看到他在中国讲学重点论述了教学现象学、再创造、现实数学、数学化，以及数学教育的理论研究与实践问题。[32]

弗赖登塔尔来华后的三十余年间，已有多位中国学者前往弗赖登塔尔研究所交流访问。中央民族大学孙晓天教授，先后几次访问弗赖登塔尔研究所，回国后撰写了“Freudenthal研究所印象”、[33]“荷兰Freudenthal研究所研究项目近况评述”[34]等文章，向国内学界介绍研究所的最新数学教育研究动向。

结　　语

有学者指出，发展数学教育一般有三种可能的途径，即对教育感兴趣、思考数学教育和促进数学教育发展。如果要做好的话，这通常是三个人的全职工作，但弗赖登塔尔似乎是“兼职”的。[35]基于他对数学教育的突出贡献，许多学者给予他高度评价，认为在数学教育方面20世纪前半叶是克莱因做了大量工作，是当时数学教育研究的领头羊，而20世纪下半叶则主要是弗赖登塔尔。[36]在为庆祝《数学教育研究》出刊100卷而选择的代表性纪念文章中，第一篇就是弗赖登塔尔的论文。[37]为纪念弗赖登塔尔在数学教育领域的贡献，2000年设立弗赖登塔尔奖，与克莱因奖同为数学教育界最高奖项，并于2003年的第十届国际数学教育大会上首次颁发。2013年，中国数学教育学者梁贯成荣获该奖项，这也是亚洲学者第一次获此殊荣。

1990年10月13日，弗赖登塔尔在散步时，坐在长椅上自然安详地去世，享年85岁。后世学者对他的评价非常客观且中肯：

> 许多与他一起学习或工作过的人，都会感激地记住他鲜明而鼓舞人心的个性。作为一名优秀的数学家，他不仅对数学的大部分内容有广泛了解，同时对这门科学的社会和教育意义也有非常敏锐的认识。他是一个心思活络的人，总是追求一些吸引他注意，或他认为重要的新事物。[38]

［参 考 文 献］

[1] Keitel, C. 'Hans Freudenthal (1905-1990): Mathematik, die Uns Angeht'[J]. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 1992, 13: 3–22.

[2] Freudenthal, H. 'Über die Enden Topologischer Räume und Gruppen'[J]. *Mathematische Zeitschrift*, 1931, 33: 692–713.

[3] Bos, H. J. M. 'In Memoriam: Hans Freudenthal (1905-1990)'[J]. *Historia Mathematica*, 1992, 19 (1): 106–108.

[4] Springer, T. A., Dalen, Van, D. *Hans Freudenthal: Selecta*[M]. Zürich: European Mathematical Society, 2009.

[5] 张勇、邓明立. 维托尔德·胡列维茨与20世纪的拓扑学[J]. 自然辩证法通讯, 2019, 41（4）: 113–122.

[6] van Est, W. T. 'Hans Freudenthal: 17 September 1905-13 October 1990'[A], James, I. M. (Ed.) *History of Topology*[C], Amsterdam: Elsevier Science B. V. 1999, 1009–1019.

[7]Freudenthal, H. 'Einige Satze Uber Topologische Gruppen'[J]. *Annals of Mathematics*, 1936, 37(1): 46–56.
[8]Freudenthal, H. 'Alexanderscher und Gordonscher Ring und Ihre Isomorphie'[J]. *Annals of Mathematics*, 1937, 38(3): 647–655.
[9]Freudenthal, H. 'Die Topologie der Lieschen Gruppen Als Algebraisches Phanomen'[J]. *Annals of Mathematics*, 1941, 42(5): 1051–1074.
[10]Freudenthal, H. 'Neuaufbau der Endentheorie'[J]. *Annals of Mathematics*, 1942, 43(2): 261–279.
[11]Freudenthal, H. 'Über die Enden Diskreter Räume und Gruppen'[J]. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 1946, 17: 1–38.
[12]Freudenthal, H. 'Der Einfluss der Fundamentalgruppe Auf die Bettischen Gruppen'[J]. *Annals of Mathematics*, 1946, 47(2): 274–316.
[13]van Est, W. T. 'Hans Freudenthal (17 September 1905-13 October 1990)'[A], Streefland, L. (Ed.) *The Legacy of Hans Freudenthal*[C], Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1993, 59–69.
[14]Freudenthal, H. 'Major Problems of Mathematics Education'[R]. California: The Fourth International Congress on Mathematical Education, 1980.
[15]van der Blij, F. 'Professor Freudenthal Zeventig Jaar'[J]. *Euclides*, 1975, 51(4): 3–7.
[16]Greer, B. 'Review of All Positive Action Starts with Criticism: Hans Freudenthal and the Didactics of Mathematics'[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2017, 95: 113–122.
[17]Gemert, S. B. *All Positive Action Starts with Criticism: Hans Freudenthal and the Didactics of Mathematics*[M]. Dordrecht: Springer, 2006.
[18]弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学[M]. 陈昌平、唐瑞芬译, 上海: 上海教育出版社, 1999.
[19]Freudenthal, H. 'Why to Teach Mathematics so as to Be Useful?'[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 1968, 1(1): 3–8.
[20]Gravemeijer, K., Terwel, J. 'Hans Freudenthal: A Mathematician on Didactics and Curriculum Theory'[J]. *Journal of Curriculum Studies*, 2000, 32(6): 777–796.
[21]Freudenthal, H. 'Geometry Between the Devil and the Deep Sea'[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 1971, 3(3): 413–435.
[22]Gravemeijer, K. 'How Emergent Models May Foster. Constitution of Formal Mathematics'[J]. *Mathematical Thinking and Learning*, 1999, 1(2): 155–177.
[23]Freudenthal, H. *Weeding and Sowing: Preface to a Science of Mathematical Education*[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1978.
[24]Freudenthal, H. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1983.
[25]Bos, H. J. M. 'The Bond with Reality is Cut: Freudenthal On the Foundations of Geometry Around 1900'[A], Streefland, L. (Ed.) *The Legacy of Hans Freudenthal*[C], Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1993, 51–58.
[26]Freudenthal, H. 'Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie-zugleich eine Besprechung der 8. Aun. von Hilberts Grundlagen der Geometrie'[J]. *Nieuw Ilrchiefvoor Wiskunde*, 1957, 5(3): 105–142.
[27]Bottema, O. 'Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie'[J]. *Mathematisch-Phvsikalische Semesterberichte*, 1963, 9: 164–168.
[28]蒲淑萍、汪晓勤. 弗赖登塔尔的HPM思想及其教学启示[J]. 数学教育学报, 2011, 20(6): 20–24.
[29]唐瑞芬. 弗赖登塔尔在中国[J]. 数学教学, 2003, 5: 1–5.
[30]卞显新. 弗赖登塔尔研究[D]. 四平: 吉林师范大学, 2018.
[31]Keitel, C. 'Book Review: Revisting Mathematics Education. China Lecturers'[A], Streefland, L. (Ed.) *The Legacy of Hans Freudenthal*[C], Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1993, 161–164.
[32]弗赖登塔尔. 数学教育再探: 在中国的讲学[M]. 刘意竹、杨刚译, 上海: 上海教育出版社, 1993.
[33]孙晓天. Freudenthal研究所印象[J]. 数学教学, 1994, 3: 38–39.
[34]孙晓天. 荷兰Freudenthal研究所研究项目近况评述[J]. 数学教学, 2001,(3): 35–36.
[35]Goffree, F. 'Hans Freudenthal: Woking On the Mathematics Education'[A], Streefland, L.(Ed.) *The Legacy of Hans Freudenthal*[C], Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1993, 21–50.
[36]徐斌艳. “现实数学教育”中基于情境性问题的教学模式分析[J]. 外国教育资料, 2000,(4): 28–33.
[37]Bakker, A. 'A Virtual Special Issue to Celebrate 100 Volumes of Educational Studies in Mathematics: Former Editors Choices'[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2019, 100(1): 1–5.
[38]Strambach, K., Veldkamp, F. D. 'In Memoriam Hans Freudenthal'[J]. *Geometriae Dedicata*, 1991, 37: 119.

[责任编辑　王大明　柯遵科]