

• 科学技术史 •

刘徽对《九章算术》中立体的辨名

A Study on Liu Hui's Work of Distinguishing the Names of the Geometric Solids in the *Nine Chapters on Mathematical Procedures*

邹大海 / ZOU Dahai¹ 夏庆卓 / XIA Qingzhuo^{1, 2}

(1. 中国科学院自然科学史研究所, 北京, 100190; 2. 中国科学院大学, 北京, 100049)
(1. Institute for the History of Natural Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190;
2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100049)

摘要: 刘徽对《九章算术》中的立体及其名称进行了较多的考察, 是他对全书概念、术语进行“审辨名分”工作的组成部分, 也是他努力为《九章算术》的数学知识构建理论基础的一种体现。本文分为不做解释、只解释实物含义、只解释几何含义、既解释实物含义又解释几何含义等四种类型分析了刘徽对《九章算术》中立体及其名称和用语的处理方式, 指出刘徽对立体进行的辨名工作是一个重大的进步, 但还未能形成作为基础的一套解释术语和一个解释框架, 是不完善的。尽管如此, 刘徽的辨名工作仍足以为他论证数学方式的正确性提供基础。

关键词: 刘徽 《九章算术》 立体 辨名 中国古代数学理论

Abstract: Liu Hui examined the geometric solids and their names that appeared in the *Nine Chapters on Mathematical Procedures*. This is an integral part of his work of examining the concepts and terminologies in the *Nine Chapters*, and is also an embodiment of his efforts to construct a theoretical basis for the mathematical knowledge of the book. This paper adopts four ways to analyze Liu Hui's treatment of the solids and their names or descriptions: providing no explanation, explaining only the meaning of material objects, explaining only the geometrical meaning, explaining both the meaning of material objects and the geometrical meaning. It is pointed out that Liu Hui's work in this respect represents a major advance, although he fell short of forming a set of explanatory terms and a framework for interpretation. Nevertheless, his work is enough to provide the basis for him to demonstrate the correctness of the mathematical methods.

Key Words: Liu Hui; *Nine Chapters on Mathematical Procedures*; Geometric solid; Distinguishing names; Ancient Chinese mathematical theory

中图分类号: N04: O119 文献标识码: A DOI: 10.15994/j.1000-0763.2021.04.007

现存中国古代早期的数学著作往往对概念、术语没有进行界定, 而处于约定俗成状态, 记载了具体的数学方法, 却对得到这些方法的推导和论证付

诸阙如。在公元3世纪的三国时期, 魏国刘徽撰《九章算术注》、吴国赵爽撰《周髀注》, 使这一局面得到了改变。由于公元前1世纪中叶编定的《九章算

基金项目: 中国科学院自然科学史研究所“科技知识的创造与传播”重大项目第二期子课题“出土简牍与秦汉数学史”(项目编号: E055010801)。

收稿日期: 2019年2月5日

作者简介: 邹大海(1965-)男, 湖南新化人, 中国科学院自然科学史研究所研究员, 研究方向为中国数学史和中国传统科学思想史。Email: dahaiz@ihns.ac.cn

夏庆卓(1995-)男, 甘肃庆阳人, 中国科学院自然科学史研究所硕士研究生, 研究方向为中国传统科学思想史。Email: xiaqingzhuo@ihns.ac.cn

术》(以下简称《九章》)是中国古代最重要的数学经典,包含了算术、代数和几何等方面十分丰富的内容,而刘徽对它的注释又十分丰富和深刻,所以刘徽注中对概念和术语的界定尤其值得重视。郭书春对刘徽的定义、推理和数学理论进行了开拓性的研究,并给予高度评价。^{[1]、[2]}但他倾向于以现代数学和逻辑学的要求为参照考察刘徽注中与之符合或接近的地方,因而他主要关注刘徽注中理论水平高的部分,而对一般性的部分不大重视,这就不能全面反映刘徽数学理论的整体状况及其所以然。因此,要对这个中国数学史领域的重大问题给出一个深入系统的回答,必须做更全面的分析,努力还原当时的历史情境。由于这一问题非常复杂,难以在一篇文章内展开,而数学理论的基础首先是概念和术语,因此本文先简要讨论刘徽的理论自觉,然后重点探讨刘徽对立体名称的辨析,在此基础上总结刘徽数学理论的某些特点以及形成这些特点的原因。

一、刘徽的理论自觉

刘徽在《九章算术注序》说他年幼的时候就学习了《九章》,年长时又进行了深入细致的学习和思考,联系实际和古代关于“阴阳之割裂”等方面的哲学思维,探索数学知识和方法的奥秘,分析它们之间的联系,总结数学的根源,形成了自己的数学观。刘徽认为数学是一个整体,犹如“枝条虽分而同本干”的一棵大树。^[2], pp.291-319)他之所以有这样的认识,是因为他对数学知识进行过精心的分析和总结,这就不免要对一些有关概念、术语进行界定,并运用数学推理,理顺不同数学概念、数学知识之间的联系。他的努力是在魏晋玄学“辨名析理”思潮的背景下进行的。^[2], pp.310-319)刘徽在注《九章算术·粟米》的今有术时说:

此都术也。凡九数以为篇名,可以广施诸率,所谓告往而知来,举一隅而三隅反者也。诚能分诡数之纷杂,通彼此之否塞,因物成率,审辨名分,平其偏颇,齐其参差,则终无不归于此术也。^[3], p.66)

今有术相当于现代数学中成比例的四个量,已知其中三个求第四个量的比例算法。刘徽认为它是一个通用的算法,可以广泛运用于各种算法之中。通过举一反三,理清各种隐匿、复杂的数量关系,使它们互相通达,将实际问题中的数量关系抽离并表示出来,考察分辨它们的名称及其含义和范围,调整它们的多少、高低使之达到某种平衡,就可以把各种问题最终化归而用今有术来解决。在分辨寻找、数量关系时,刘徽提到了要“审辨名分”,说明他是认识到辨析概念和术语的重要性,而刻意进行这项工作的。

刘徽在序言中说:

又所析理以辞,解体用图,庶亦约而能周,通而不黷,览之者思过半矣。^[3], p.3)

他强调要将对数学中道理的分析用言辞表达出来,用图形把对整体的分解表示出来,这样的方法可以使各种数学知识通过简单的原理贯通起来,从而让读过它的人能理解《九章》大半的内容。本来,早期的数学方法的获得,并非只是经验的总结和直观的猜想,但古人编写数学著作时往往把思维过程略去,只留下算法和算题,刘徽则明白说明用言辞和图形表达数学思维过程的必要性。刘徽这里说的“析理”表明了他是有意识地要利用推理和分析的方法来探索数学知识之间的联系。

刘徽所处的时代正是中国哲学史上魏晋玄学盛行的时期,而魏晋玄学强调“辨名析理”的方法。^[4]刘徽的“审辨名分”与玄学的“辨名”在意义上相似而用语更加明确,他的“析理”则与玄学的“析理”用语完全相同,这些充分反映了他所处时代的印记。

要进行有效的推理,首先需要明白概念和术语的含义,所以辨名是析理的前提和基础。下面我们具体考察刘徽对立体名称进行“审辨名分”的工作,为简省起见,我们采用“辨名”一词。

二、刘徽对立体所做的辨名工作

郭书春认为,刘徽创造性地给《九章》中“许多重要数学概念作出了明确的定义,揭示了这些概念的本质属性,成为他进行判断、推理和证明的前

①此处的“定义”并非现代意义上的定义,刘徽受当时魏晋玄学方法论“辨名析理”的影响,对《九章算术》中的名词术语进行一定的界定或解释,我们借用魏晋时期已有的说法,称为“辨名”。对刘徽《九章》辨名工作的全面分析,我们将另外讨论。

提和出发点。”^[1]他以现代数学和逻辑学为参照,主要关注那些水平较高、比较符合现代要求的“定义”。^①不过,刘徽对一些概念、术语的含义和范围所做的描述,有些可以用现代的定义来衡量,有些则不能。另外,还有一些概念和术语,郭书春没有理会而未做分析。他对《九章》中立体的研究,也是如此。这就为我们本文留下了研究的空间。

《九章》含有20种立体、30个立体名称或用语,涉及37个算题和1条相对独立的术文。20个立体中,正方体见于第4章、第7章,有“立方”和“方”两个名称;球仅见于第4章,只有“立圆”一个名称;第1章有宛田,其形状不能完全确定,作为立体其形状可能相当于球缺,但古人只求其面积,可见只考虑其表面,故暂按球冠(疑似)对待。其他立体都只见于第5章,介绍关于土方工程的工作量特别是体积和容积的计算方法,也包含了少量需要计算体积或容积的其他问题。此章名“商功”,刘徽解题目曰:“以御功程积实”,较好地概括了这章的内容。此章包含28道算题,涉及到17种立体、26个立体名称或用语,是本文分析的重点。

《九章》中的立体,绝大多数都以实物及其名称的形式出现,只有少量抽象的立体名称。下面我们就刘徽对这些立体及其名称或用语的处理方式,分门别类做一较为全面的分析。

1. 未做解释的立体

据统计,有超过一半的立体名称刘徽没有做解释。

城、垣、堤、沟、堑、渠从几何学上看都是截面为梯形的直棱柱,它们都是人们常见的实物,《九章》显然是截取其中一段来考虑其形状的,人们既不会对这种形状有疑问,更也不会不知它们是什么东西。另一方面,根据《九章》的题设很容易确定其形状,因此,刘徽未对这些名称进行解释或者辨析,应是考虑到没有解释的必要。仓是长方体,刘徽没有解释它,应该也是同样的原因。

方既可以是正方形,也可以是正方体,还可以是正方形或正方体的一边,具体是哪一种根据上下文可以很容易地进行判断。《九章》第7章的第16题说:“今有玉方一寸,重七两;石方一寸,重六两。今有石立方三寸,中有玉,并重十一斤”,([3], p.294)前面提到“方”,后面提到“立方”,显然这里的方是正方体,刘徽无需解释。方亭、圆亭分别是正四棱台和正圆台,在现实中都有这类实物,

根据题设也容易确定其形状,刘徽没有做解释也可以理解。方锥、圆锥相对要抽象一些,它们是常见的简单立体,亦不必做解释。

盘池、冥谷与刍童都是实物,前两者刘徽没有做解释,它们与后者首先并列出现在第5章第18题和第19题之间的“刍童、曲池、盘池、冥谷皆同术”一段单独的术文中,除曲池(上下底为扇环的台体外,其他三种都是截头方锥体(以平行的两个长方形为上下底、四个侧面为梯形的六面体)。由于刘徽对前面第18题的刍童做注时已经解释了刍童的形状,所以他对盘池和冥谷不做解释也很正常。不过,作为实物从字面上理解,对盘池很容易,对冥谷(墓穴)相对要难一点,也不算很难,刘徽没有解释这两个词也比较正常,当然也有可能现存版本脱落了“冥谷”的解释,但这类情况应该很少。

“圆堞墙”一词中,难解的只是“堞墙”,由于刘徽在前面对“方堞墙”做注时已解释了“堞墙”,所以他没有再对“圆堞墙”做解释的必要。

宛田在第1章即“方田”章,从字面看它就是中央隆起的田或周边弯曲的田,现代学者有的认为是球冠形,有的认为是优扇形。从题设中“下周”多少步来看,说它是优扇形或周边弯曲的平面图形均不可取,还应该是中央隆起的田。李籍《音义》说“宛田者,中央隆高。《尔雅》曰:‘宛中宛丘’,又曰:‘丘上有丘为宛’,皆中央隆高之义也”,([3], p.462)是其证。刘徽在论证《九章》宛田面积公式不正确时,实际也是这么理解宛田形状的。但他没有对宛田的名称做具体的解释。之所以如此,我们不太确定,一种可能是:他可能认为从字面上看,宛田的大致含义是比较清楚的,而具体几何形状本来就不确定,所以他就不解释了。

总之,刘徽对一些立体名称不做解释,大致有两方面的原因,一是习见或简单,人所共知,二是名称中只有一部分需要解释,而这部分在前面已经解释过了。

2. 只解释其实物含义的立体

商功章第8题、第9题中的立体分别“方堞墙”“圆堞墙”。方、圆的含义是大家清楚的,“堞墙”则不是常见的词语,刘徽在第8题“今有方堞墙”下做注:“堞,堞城也。墙,音丁老切,又音羸,谓以土拥木也。”刘徽对“堞”、“墙”分别进行了解释,还给后者加注了读音。据此,则“堞墙”是以木为核心,用土夯成的城。从题设所给的数据看,

显然“方堞墙”和“圆堞墙”的几何形状分别是常见的正四棱柱体和圆柱体。所以刘徽不再做更多的解释,是可以理解的。

值得注意的是,刘徽对“堞墙”做解释时用到了“城”字。根据具体的题设条件,我们可以发现刘徽在这里用到的“城”字与第2题中的“城”含义相同,这两者是同一类“城”。虽然作为方堞墙的城比第2题的城在形状更简单,但可以看出,刘徽是用人们较为熟悉的“城”字对较为陌生的“堞”字进行解释。这说明刘徽认为第2至第7题涉及到的立体是更常见的,其特例才是方堞墙的形状。因此,这仍是用常见的立体来对较为难懂的立体名称进行解释,显示出刘徽对立体名称的辨析具有一定的区分度和自觉性。

第5章计算圆囷的容积,刘徽在“今有圆囷”下做注“圆囷,廩也,亦云圆圉也。”([3], p.177)这里“廩”其实只针对“囷”字,大概觉得“圆”字无需解释;“亦云圆圉”是说明圆囷有另一个名称。

总之,如果几何形状很简单而明确,刘徽只从实物的角度做解释。

3. 只解释其几何含义的立体

第4章第23题“今有积一百八十六万八百六十七尺”下注:“此尺谓立方之尺也。凡物有高深而言积者,曰立方。”([3], p.128)这里涉及作为正方体的立方。不过,这并不是解释什么是立方,前一句只是说明题设中“一百八十六万八百六十七尺”的“尺”是指体积的立方尺而不是长度的尺、面积的平方尺;后一句则是说明如何判断给的一个积数是指立方,当然有高或深的积,区别于只有长、宽的积,对理解立方的特点还是有用处的。第4章第24题“开立方”下刘徽注:“立方适等,求其一面也。”([3], p.128)意思说一个立方的每一边相同,由体积求其边长,这本是解释什么叫开方,但也反映出对作为正方体的立方的本质认识。

第5章第23、第24和第25题分别是“委粟平地”、“委菽依垣”和“委米依垣内角”,都是已知“下周”和“高”,求其体积。这里的用语“委粟平地”、“委菽依垣”和“委米依垣内角”是动词+宾语+补语的结构,不是名词性的,因此不能算是名词,但它们确实给出了形成立体的方式。从给出的题设以

及答案的数据,可知这是默认从上倒下粮食时在理想状态下形成的立体形状。针对这3个算题,刘徽统一在第25题下委粟术的术文之下注释了3种立体的形状。([3], p.174)他在“下周自乘,以高乘之,三十六而一”下注:“此犹圆锥也”,这是说明第23题“委粟平地”堆成的粟呈圆锥形。他在“其依垣者”下注:“居圆锥之半也”,这是说明第24题“委菽依垣”堆成的菽呈半圆锥(由过对称轴的平面分割而成)的形状。他在“其依垣内角者”下注:“角,隅也,居圆锥四分之一也”,这是针对第25题“委米依垣内角”,首先解释了“角”,然后说明把米靠墙壁的内角堆积形成四分之一圆锥(由过底面圆的两条垂直直径和对称轴的平面分割而成)的形状。除了解释“角”外,刘徽都是从几何形状上来解释的。刘徽对“委米依垣内角”的解释其实应该归入下一类,但由于与前两个连在一起,我们在这里做了讨论,下面就不涉及了。

前面提到刘徽解释了刍童,而对与之同形且同术的盘池、冥谷不解释,但他解释了与之“同术”的曲池,在具体针对曲池的术文“其曲池者,并上中、外周而半之,以为上袤;亦并下中、外周而半之,以为下袤”下他做注说:

此池环而不通匝,形如盘蛇而曲之。亦云周者,谓如委谷依垣之周耳。引而申之,周为袤。求袤之意,环田也。([3], p.170)

这里实际没有对作为实物的曲池是什么东西或为何叫这个名称做解释,因为从字面上看,“曲池”不难理解。刘徽的话在于说明曲池的形状特征:呈环形却不是首尾相接,形如盘曲的蛇。接下来进一步解释术文中的“周”不是整个的周长,而是类似“委谷依垣”(实际是“委菽依垣”)之类的算题中的周,指的是内外的圆弧。然后他设想把图形拉直,周变成了袤,^①术文中求袤的方法,其原理在于上、下底是环田的形状,言下之意是可以利用针对环田的方式来得到前文所需要的上袤和下袤。这虽然是针对术文,但也进一步明确了曲池的几何性质。

4. 解释同时涉及实物含义和几何形状的立体

堑堵、阳马、鳖臑和长方体(正方体)是刘徽在验证、推导立体体积算法时用的基本立体。第5章第14题讲堑堵的体积算法,刘徽首先从几何形状

①古代把东西方向的长度称为广,南北方向的长度称为袤。亦把两个垂直方向的长度一个称为广,另一个称为袤。

的角度解释堑堵(底为直角三角形的直三棱柱):“邪解立方得两堑堵;虽复随方,亦为堑堵,故二而一”,说明把正方体或长方体斜着分解(实际是过一组相对面的对角线平分)得到两个(一样的)堑堵,所以把正方体或长方体的体积除以2得到每个堑堵的体积。刘徽又说“推其物体,盖为堑上叠也”,说明作为实物的堑堵可能是叠在沟堑上面的一种设施,接着他又进一步说“其形如城,而无上广,与所规棋形异而同实”,描述了实物堑堵与城的共性与差异,并说明这与上面由长方体分解得到的立体在形态上有出入但体积算法相同。最后刘徽说“未闻所以名之为堑堵之说也”,表明自己也不知道为什么将它称为堑堵。刘徽虽然不知命名的原因,但这体现了刘徽有过从语词方面进行解释的努力,而且前面已经提到堑堵为何物,这与原本就不做解释是不一样的。

第5章第15题讲阳马(底面为长方形、一棱垂直于底面的四棱锥)的体积算法,刘徽在术文下注云:“阳马之形,方锥一隅也”,意思是阳马的形状,就是方锥(正四棱锥)的一个角,这是假设读者已知方锥的形状,由方锥来说明阳马的形状。之后他又补充说:“今谓四柱屋隅为阳马”,则是从实际生活中的情况来说明阳马作为实物是指什么。然后,他又利用立体的分解与组合,来说明“立方”“堑堵”“阳马”和“鳖臑”之间的关系:

邪解立方得两堑堵,邪解堑堵,其一为阳马,一为鳖臑,阳马居二,鳖臑居一,不易之率也。合两鳖臑成一阳马,合三阳马而成一立方,故三而一。验之以棋,其形露矣。悉割阳马,凡为六鳖臑。([3], p.166)

刘徽说明:把一个立方(正方体,亦可是长方体)斜向分解成两个堑堵,再把堑堵斜向分解,得到一个阳马和一个鳖臑,两者的体积之比总是2比1。两鳖臑可合成一个阳马,3个阳马可合成一个立方,因此把立方的体积除以3便得到阳马的体积。把3个阳马都分解,便得到6个鳖臑。他还强调,用棋(立体模型)展示的方法来检验,这些就都能很清楚地显露出来。

这里刘徽既指明了立体的形状,也分析了立体体积算法成立的原因。由于已经讲到了作为几何体的鳖臑之形状特征,所以刘徽在给讲鳖臑(各面为直角三角形的四面体)体积算法的下一题(第5章第16题)做注时,对鳖臑的几何形状不做详细的描述,而侧重于其字面含义:“臑者,臂骨也。或曰半阳马,其形有似鳖臑,故以名云。中破阳马得两鳖臑,[鳖臑]之见数即阳马之半数。”^①刘徽首先对“臑”字进行了解释,随后对鳖臑的形状进行描述,还解释了“鳖臑”名称的由来。最后说从中间把阳马分开得到两个鳖臑,鳖臑外观上的数量是阳马的一半,以此说明鳖臑的求积算法之正确性。值得注意的是,这里鳖臑与前面的城、垣、沟、堑、渠、方堞、堦等不同,它并不兼指作为鳖臑(鳖臑)的实物,而只指几何立体,只是借用了这个名字。刘徽的用词为“其形有似”,大概就是这个问题。

第5章第18题讲刍甍的体积算法,之后为刍童、曲池、盘池、冥谷等立体统一的体积算法,再往后是关于刍童体积算法的第19题。刘徽在刍甍(平放的正三棱柱的上方的一条棱往中央收缩后得到的楔形体。其底面为长方形,两组相对的侧面分别是梯形和三角形)的术文下做注云:

推明义理者:旧说云,凡积刍有上、下广曰童,甍谓其屋盖之茨也。是故甍之下广、袤与童之上广、袤等。正斩方亭两边,合之即刍甍之形也。([3], p.169)

刘徽在这里引用“旧说”,也就是前人的说法,对“刍童”和“刍甍”进行了解释。“刍”字的意思是指喂牲口的草。刘徽没有批评旧说,说明他是赞同的。不过,旧说是不全面的,只提到了刍童有上广和下广,甍是什么实物。这对于展现这两个立体的特点是不够的。所以刘徽接着指出,刍甍的下广和下袤分别相当于刍童的上广和上袤,如果把正四棱台(方亭)沿上底的一组对边垂直下切,去掉中间而把两侧的部分合在一处,便是刍甍的形状,这样的解释就具体得多了。在这里,刘徽不仅解释了“刍甍”的含义,还对接下来要将讲到的“刍童”进行了解释。

^①现存宋刻本等原文“鳖臑”之后接“之见数”,^[5]武英殿本等在“之”字前是“鳖臑鳖臑”。^[6]“臑”是“臑”的异体字,“鳖臑鳖臑”相当“鳖臑鳖臑”。现代学者有的认为只有一个“鳖臑(臑)”是正确的,有的认为有两个才正确。我们认为原文应该是在“鳖”、“臑”旁各加重文号,作“鳖=臑=”,表示“鳖臑鳖臑”,但在传抄过程中重文号脱落(重文号容易漫漶或被忽视,因此这样情况很容易发生),所以按将重文还原的表达方式,则宜在“之见”前补“鳖臑”二字。

第5章第17题讲羡除(底面为直角三角形的三棱柱被两个不垂直于侧棱的平面所截得的部分,是两个相对面为三角形,另三个面为梯形且其中两个垂直的五面体。)容积的算法,刘徽在术文下注云:

羡除,实隧道也。其所穿地,上平下邪,似两鳖腴夹一堑堵,即羡除之形。([3], p.168)

刘徽首先从实物的角度说明羡除就是实际生活中见到的隧道;然后从几何形状的角度进一步指出“羡除”的形状上面是平的,下面是斜的,就像是两个“鳖腴”中间夹着一个“堑堵”的样子。

可以看出,刘徽用立体分解的方式揭示立体的特征,这又与推导立体的体积算法相结合。所以刘徽对立体的辨名,有时又是和析理在一起进行的。

下面我们将刘徽对《九章》各种立体“审辨名分”的情况列表如下页表1:

可以看到,表中题目用罗马数字表示章序,印度-阿拉伯数字表示在章中的题序。对于立体的种类,有的是特殊与一般的关系,但古人在一定情况下区别对待,比如正方体和长方体,正四棱台(方亭)和截头方锥体(刍童、盘池、冥谷等),我们也区别对待。

第1竖栏的立体,一般用现代的名称来指称。但有一部分立体在今天没有专门名称,用文字描述也很复杂,如果古代只有一个名称且该名称不指代两个不同形状的立体,则仍用这个名称;如果多个名称指同一形状的立体,则选用其中一个作为我们的现代指称。

第5章的第23-25题是讲,在平地上、靠墙和靠在墙的内角分别形成一堆,由相应的数据求其体积。这里没有正式给出名称,而是用“委粟平地”、“委菽依垣”和“委米依垣内角”来分别描述每一堆粮食的形成方式。所以它们只描述性用语,我们在表中分别加方框以示区别。

三、刘徽对立体辨名的特点

《九章》中的30个用立体名称和用语,有3个是描述性用语,刘徽不对它们进行解释,但指出了所成立体的形状。其余27个立体名称中有16个刘徽没有做解释,约占59%。刘徽之所以不做解释,其原因大致可以分为两个方面,一是这些名称所对应的实物很常见,或立体形状非常简单

且现实中常见这种形状的实物,由于它们的含义人所共知,也就不必要做解释;二是名称是由两个词合成的词组,其中一个词义很明显,另一个较难理解的词在前面已解释过,由于合成词的含义没有偏离其组成部分,也就不必再做解释。

对其余11个立体名称进行辨名时,刘徽从实物和几何形状或性质两个方面进行解释。在从实物的角度做解释时,他用较常见、较易懂的词来解释较少见、较难懂的词,未出现相反或循环的情况。对于几何形状很简单而明确的立体,如果名称不常见,则只从实物的角度做解释。

刘徽在从几何方面做解释时,有多种方式。一是直接用已知的简单立体来直接描述待释名词或用语(如“委粟平地”、“委菽依垣”、“委米依垣内角”)。二是利用前面已经辨名过的立体或已知的简单立体来解释(如堑堵、阳马、鳖腴、羡除等)。三是直接揭示立体的特征(如立方、刍童、刍甍)。四是通过把已知立体分解,得到待释立体,或者把待释立体合成为已知立体,以此来揭示立体的特征(如堑堵、阳马、鳖腴、刍童、刍甍)。中国古代用立体的组合和分解研究立体性质时,常用棋来演示,刘徽在推导和验证《九章》中立体的体积算法时,普遍使用了这一方法。他在为某些立体进行辨名时,亦借助了棋。对于这些辨名方式,刘徽在辨名时,有时是单一使用其中一种,有时则是两种或多种结合使用,有时还与从实物的角度做解释的方式结合使用。这些辨名工作,能在一定程度上揭示立体的特征和属性。

刘徽在从几何形状的角度辨名时,除了用到一些简单或前面已有解释的立体,还用到“高”“深”“广”“周”“袤”“从”“面”等表示线的词,和“上”“下”“边”“正”等表示位置关系的词和“匝”“曲”等表示线、面形态的词,这可以为他辨名的清晰性提供帮助。这些词中有的本身含义还不是很明确,用现有的这些词汇也不足以准确描述丰富的几何关系。所以,我们应该承认,刘徽还远未为其辨名发展出整套的解释术语,也没有明确的解释框架,因此刘徽关于立体的辨名工作,是不完善的。

在现代数学和欧几里得几何学中,定义和推理是相互关联却又泾渭分明的两部分。刘徽有意识地区分了辨名和析理。在数学实践中,他对立体辨名的工作,为他在论证或验证立体体积算法时

表1 刘徽对《九章》立体“辨名”统计表

立体形状	立体名称或用语	是否表示实物	题号	刘徽对立体名称或用语的解释原文
1 正方体	1 立方	否	IV.19-22, VII.15	IV.19: “此尺谓立方之尺也。凡物有高深而言积者, 曰立方。” IV. 24: “立方适等, 求其一面也。”
	2 方	否	VII.15	(无)
2 正四棱柱	3 方堦墻	是	V.8	V.8: “堦者, 堦城也。墻, 音丁老切, 又音羸, 谓以土拥木也。”
3 长方体	4 仓	是	V.27	(无)
4 截面为梯形的直四棱柱	5 城	是	V.2	(无)
	6 垣	是	V.3, V.26	(无)
	7 堤	是	V.4	(无)
	8 沟	是	V.5	(无)
	9 塹	是	V.6	(无)
	10 渠	是	V.7	(无)
5 正四棱台	11 方亭	是	V.10	(无)
6 截头方锥体	12 刍童	是	V.19	V.24: “推明义理者: 旧说云, 凡积刍有上下广曰童, ……”。
	13 盘池	是	V.21	(无)
	14 冥谷	是	V.22	(无)
7 正四棱锥	15 方锥	否	V.12	(无)
8 堦堵	16 堦堵	是	V.14	V.14: “邪解立方得两堦堵。虽复随方, 亦为堦堵, 故二而一。此则合所规棋。推其物体, 盖为堦上叠也。其形如城, 而无上广, 与所规棋形异而同实。未闻所以名之为堦堵之说也。”
9 阳马	17 阳马	是	V.15	V.15: “按: 此术阳马之形, 方锥一隅也。今谓四柱屋隅为阳马。……邪解立方得两堦堵, 邪解堦堵, 其一为阳马, 一为鳖臑, ……合两鳖臑成一阳马, 合三阳马成一立方”。
10 鳖臑	18 鳖臑	否	V.16	V.16: “按: 此术臑者, 臂骨也。或曰半阳马, 其形有似鳖肘, 故以名云。中破阳马得两鳖臑, [鳖臑]之见数即阳马之半数。”
11 羨除	19 羨除	是	V.17	V.17: “羨除, 实隧道也。其所穿地, 上平下邪, 似两鳖臑夹一堦堵, 即羨除之形。”
12 刍甍	20 刍甍	是	V.18	V.18: “推明义理者, 旧说云: 凡积刍有上下广曰童, 甍谓其屋盖之茨也。是故甍之下广、袤与童之上广、袤等。正斩方亭两边, 合之即刍甍之形也。”
13 圆柱	21 圆堦墻	是	V.9	(无)
	22 圆囷	是	V.28	V.28: “圆囷, 廩也, 亦云圆囤也。”
14 圆台	23 圆亭	是	V.11	(无)
15 圆锥	24 圆锥	否	V.13	(无)
	25[委粟平地]	是	V.23	V.25: “此犹圆锥也。”
16 半圆锥	26[委米依垣]	是	V.24	V.25: “居圆锥之半也。”
17 四分之一圆锥	27[委米依垣内角]	是	V.25	V.25: “角, 隅; 居圆锥四分之一也。”
18 曲池	28 曲池	是	V.20	V.18 与 V.19 之间: “此池环而不通匝, 形如盘蛇而曲之。亦云周者, 谓如委谷依垣之周耳。引而申之, 周为袤。求袤之意, 环田也。”
19 球	29 立圆	否	IV.23, IV.24	IV.24: “立圆, 即丸也。”
20 球冠(疑似)	30 宛田	是	I.33, I.34	(无)

的析理工作提供了基础。在文字表述上,多数情况我们可以很容易把辨名和析理区分开来。可以认为,比之更早时代的数学著作,刘徽关于辨名的工作确是一个巨大的进步。

不过,有时候刘徽的辨名工作与其析理工作是互相交叉的(如对堑堵、阳马、鳖臑等算题的注释),不能明确区分开来。这是他与现代数学和欧氏几何学很不一样的地方。一方面把定义和推理用泾渭分明的形式化的方式区分开来,一方面揭示两者之间的联系,是数学特别是理论数学发展的重要方法,这种方法在古代世界远非普遍。数学家要完全贯彻这种方法,需要在方法论上形成一种强势思维。刘徽的时代还没有形成这样一种氛围,中国古代也一直没有,加之刘徽不是撰写独立的数学著作,而是采用为经典作注的方式展现他的数学知识,这就限制了他的思维。另外,刘徽在解决立体问题时,非常重视棋的使用。这种方法重在具体操作,“可以比较容易地、直观地表现形体之间的关系,但由于古代绝大多数情形下用竹简书写,要画复杂的立体图形难度比较大。即使有昂贵的布帛来书写和绘图,由于立体图的绘制本身在古代难度大,而单凭文字表述又很困难”,^[7]于是棋的使用,也会减少数学家努力用文字、符号准确描述立体属性和性质的动力。所以刘徽的辨名工作往往未能达到现代定义的要求,没有一个相对完善的解释系统,是很自然的。

结 语

综上所述,刘徽具有对数学概念、术语进行辨析、对数学方法进行析理的理论自觉。他对《九章》中立体进行的辨名工作,除了从实物的角度这种比较一般的方式外,还从几何特征的角度采

用了多种方式揭示立体的属性,这些方式或单独使用,或相互结合,为下一步对体积算法的析理提供基础,并进而奠定了当时体积知识的理论基础。可以认为,刘徽对立体的辨名,足以满足当时和之后相当长时间内关于体积算法的理论需要,是一个具有开拓性的重大进步。同时,我们也应该承认,受时代的局限,为《九章》作注形式的限制,以及惯用棋的演示带来的对理论探究动力的消解等多方面的因素之制约,刘徽的辨名工作,还未能形成一套比较系统的解释术语和满足立体几何中定义需求的解释框架,是不完善的。尽管如此,刘徽的辨名工作和析理工作一起,足以展现中国古代数学家在数学理论方面的智慧,成为古代东方数学世界的一座丰碑。

[参 考 文 献]

- [1] 郭书春. 刘徽《九章算术注》中的定义及演绎逻辑试析[J]. 自然科学史研究, 1983, 2(3): 193-203.
- [2] 郭书春. 古代世界数学泰斗刘徽[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2013, 258-319.
- [3] 郭书春. 九章算术新校[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2014.
- [4] 冯友兰. 中国哲学史新编[M]. 第四册, 北京: 人民出版社, 1992, 33-39.
- [5] 九章算经[M], 鲍澍之刻本, 影印《宋刻算经六种》[C], 卷五, 北京: 文物出版社, 1980, 9b.
- [6] 刘徽撰. 九章算术[M], 武英殿聚珍版, 郭书春. 中国科学技术典籍通汇[C], 第一册, 郑州: 河南教育出版社, 1993, 145.
- [7] 邹大海. 《数》《算数书》和《九章算术》中一类楔形体研究——兼论中国早期求积算法的某些特点[J]. 汉学研究, 2014, 32(3): 69-94.

[责任编辑 王大明 柯遵科]