

• 人物评传 •

## 罗伯特·李·莫尔：美国德州拓扑学派奠基人

Robert Lee Moore and the Topology School of Texas

胡卓群 /HU Zhuoqun 刘鹏飞 /LIU Pengfei

(吉林师范大学数学学院, 吉林四平, 136000)  
(School of Mathematics, Jilin Normal University, Siping, Jilin, 136000)

**摘要：**罗伯特·李·莫尔是活跃在20世纪上半叶的美国著名数学家，主要研究兴趣为点集拓扑，同时对几何、分析等领域也有重要贡献。莫尔在德州大学奥斯汀分校任教长达49年，通过自己独特的公理化教学法“莫尔方法”，培养了大量优秀的数学人才，他和他的追随者后来被称作“莫尔学派”，即德州拓扑学派，使得莫尔成为点集拓扑学发展史上承上启下的重要人物。

**关键词：**罗伯特·李·莫尔 点集拓扑 莫尔教学法 德州拓扑学派

**Abstract:** Robert Lee Moore was a famous American mathematician active in the first half of the 20th century. His main research interest is point set topology. At the same time, he has also made important contributions to the fields of geometry, analysis and so on. Moore taught at the University of Texas at Austin for 49 years. Through his unique axiomatic teaching method - the “Moore Method”, he trained a large number of excellent mathematical talents. He and his followers were later called the “Moore School”, that is, the Topology School of Texas, making Moore an important connecting person in the development history of point set topology.

**Key Words:** Robert Lee Moore; Point set topology; The Moore Method; The Topology School of Texas

中图分类号：O189 文献标识码：A DOI: 10.15994/j.1000-0763.2022.12.015



20世纪二三十年代，是点集拓扑学形成和发展的重要时期。罗伯特·李·莫尔（Robert Lee Moore, 1882–1974，以下简称莫尔）在这段时间里大放异彩，发表了大量点

集拓扑学方面的论著，为后人的点集拓扑研究奠定了基础，他的公理化教学法被后人称为“莫尔方法”，对美国数学教育影响深远，他与其追随者们被称为“德州拓扑学派”，是点集拓扑发展史上不容忽视的一个学术群体。

### 一、莫尔的生平概述

1882年，莫尔出生在德克萨斯州的达拉斯。8岁那年，他进入达拉斯的一所私立学校学习，并表现出对数学的浓厚兴趣和不俗天分。他在学校校长的鼓励下决定报考德克萨斯大学，并

罗伯特·李·莫尔 集拓扑学方面的论著，为后人的点集拓扑研究奠定了基础，他的公理化教学法被后人称为“莫尔方法”，对美国数学

基金项目：国家自然科学基金天元基金“数学史与数学文化高级研讨班”（项目编号：12126411）。

收稿日期：2021年11月18日

作者简介：胡卓群（1999–）男，吉林扶余人，吉林师范大学数学学院硕士研究生，研究方向为数学史。Email: huzhuoqun9910@163.com

刘鹏飞（1979–）男，吉林辽源人，吉林师范大学数学学院教授，研究方向为数学史。Email: pfliu@jlnu.edu.cn

为此自学了微积分。1898年，不满16岁的莫尔成功考入德州大学奥斯汀分校，老师是当时的系主任霍尔斯特德（G. B. Halsted），莫尔在其指导下学习非欧几何，入学三年后的1901年，莫尔便同时获得了学士和硕士学位，并且留在母校成为一名助教。

莫尔具有极高的数学天分、自学能力和超强的问题意识。美国数学协会出版的杂志《美国数学月刊》经常会刊登一些难度较大的数学问题，公开寻求解决方法。1901年，莫尔就与人共同解决了一个较为复杂的四次根式方程组问题。<sup>[1]</sup> 希尔伯特1899年出版的《几何基础》中阐述了五类公理，共20条，莫尔在1902年证明其中一条公理是多余的<sup>①</sup>。

霍尔斯特德对莫尔寄予厚望，认为他完全不次于自己最优秀的学生迪克森（L. E. Dickson）。霍尔斯特德又是一个激进甚至有些偏执的学者，他的性格深深影响了莫尔，导致莫尔日后也成为一个极度自信且略有些固执的人。1902年，霍尔斯特德推荐莫尔担任讲师，莫尔为此感到十分兴奋，但是这堆短暂的兴奋之火很快被无情扑灭。在当时，有一位毕业于芝加哥大学、并在奥斯汀中学任教的女硕士也在竞争德州大学的讲师职位。虽然此人学术造诣不如莫尔，但由于出身显赫，她还是顶掉了莫尔的上岗名额。霍尔斯特德对此愤怒不已，公开发文痛斥校方的无耻行径。加上此前霍尔斯特德经常毫不留情地当面批评学生和大学的管理委员会，他与校方实际上积怨已深。

莫尔没有拿到心仪的讲师职位，霍尔斯特德为此还曾给他寄过500美元作为资助，但是莫尔拒绝了。霍尔斯特德在此时和校方的关系愈发恶劣，离开德州大学已成定局。同年，霍尔斯特德在《几何教学》一文中激烈批判美国当时的教学是“毫无希望的混乱”，矛头直指自己现在使用的几何学教材和其他辅助工具。德州大学随即宣布与霍尔斯特德解除关系。莫尔受到霍尔斯特德的牵连也被学校辞退。<sup>[2]</sup>

离开母校之后，出于谋生的需要和回家的方便，莫尔在马歇尔一所高中任教。短暂的中学教师生涯并不愉快，但他对数学的热爱未减毫分。1903年，凭借霍尔斯特德的关系，莫尔申请了芝加哥大学的研究生奖学金，成功拜入时任芝加哥大学数学系主任的伊莱基姆·黑斯廷斯·莫尔（E. H. Moore）门下。其实在莫尔之前，E. H. 莫尔早就证明过希尔伯特那个公理是多余的，只不过莫尔的方法更加简洁清晰——用E. H. 莫尔的评价来说，是一种“令人愉悦的简洁”。<sup>[3]</sup>

E. H. 莫尔除了是一位优秀数学家之外，同样也是一位卓越的数学教育工作者，他一生共培养了31位博士，包括后来的著名数学家维布伦（O. Veblen）。莫尔在芝加哥大学读博时，E. H. 莫尔正醉心于皮亚诺和希尔伯特的理论。虽然莫尔由当时刚毕业留校的维布伦主管他的许多事务，但E. H. 莫尔的思想方法和学术作风深深影响了莫尔。1905年，莫尔以《几何假设的度量集》为题获得博士学位，指导教师即为E. H. 莫尔和维布伦。该文于1908年发表在《美国数学会汇刊》上。<sup>[4]</sup>

莫尔在1905到1920年这十五年间多次跳槽，1905年毕业后先是进入田纳西大学任教，翌年转入普林斯顿大学。在普林斯顿工作两年后又跳槽到西北大学。在西北大学工作三年后去了宾夕法尼亚大学。而莫尔一直希望回到家乡工作，终于在1920年如愿以偿，直到87岁高龄退休。

## 二、莫尔的数学贡献

莫尔早期追随霍尔斯特德和维布伦，主攻几何学方向，但分析学也吸引年轻的莫尔。在这两个领域中，莫尔主要解决了如下的问题。几何学方面，他于1905年的博士论文中将点、序和全等作为原始概念，给出欧几里德几何的公理，并考虑了公理的独立性问题。1915年他

①莫尔始终将证明希尔伯特公理这件事视为自己的第一个成果，但当时《几何基础》的英文版是霍尔斯特德翻译的，也是霍尔斯特德建议莫尔证明这条定理是多余的，故该成果的署名是霍尔斯特德。

证明了一个令人惊讶的结果,维布伦在1905年证明了若当曲线定理在满足其论文公理I-VIII和X的不可度量空间 $V$ 中成立,而莫尔证明这个空间 $V$ 是可度量的,并且在拓扑上等价于欧几里德坐标平面。<sup>[5]</sup>1919年莫尔给出以点、区域和合同变换为基本术语的欧几里德和双曲几何的公理基础。<sup>[6]</sup>1920年莫尔在给维布伦与杨(J. W. Young)合著的《<射影几何>第二卷》书评中对一些基础理论进行了批判性分析与回顾,特别讨论了相关术语定义的合理性问题。<sup>[7]</sup>分析学方面,他于1911年、1912年相交之际强调了杜哈梅尔(J. M. Duhamel)定理的重要性,认为该定理的应用范围比原来更广。<sup>[8]</sup>他在1914年、1915年提出线性连续统的一系列公理,并讨论E. H. 莫尔意义下公理的完全独立问题。<sup>[9]-[10]</sup>

莫尔一生最璀璨、最耀眼的成就,当属点集拓扑学领域。莫尔首次接触拓扑学,是在求学期间,那时点集拓扑学虽然没有正式形成完整理论框架,但内容也已相当丰富。人们已经定义了维数和连续性等基本问题,虽然这些拓扑学问题超出霍尔斯特的研究范围,但他还是乐于跟莫尔共同交流这个问题,这也很大程度上鼓舞莫尔实现从几何学到拓扑学的转变。

1916年,莫尔继承发展了康托学说,在豪斯道夫《集合论基础》的基础上,研究了拓扑空间及相关性质,在《美国数学会汇刊》上发表《平面位置分析的基础》一文,<sup>[11]</sup>该文正式拉开莫尔在点集拓扑学领域的研究序幕,也是他在点集拓扑学领域最重要的研究成果之一。同年他在《美国科学院院报》上刊登了此文同名简介。<sup>[12]</sup>

《平面位置分析的基础》全文共34页,包括三个公理系统,莫尔将它们分别记为 $\Sigma_1$ 、 $\Sigma_2$ 、 $\Sigma_3$ 。除此之外描述了13条公理、52条定理以及相关解释和证明。在这篇文章中,莫尔初次提到“展开列”的概念,这对点集拓扑学有重要的推进意义。具有展开列的空间叫可展空间,而正则的可展空间则称为莫尔空间。莫尔空间是否可度量化至今仍是一个值得讨论的问题,不断推动点集拓扑学的发展。后来,前苏

联数学家亚历山德罗夫(P. S. Alexandroff)和乌雷松(P. S. Urysohn)通过展开列,又给出拓扑空间的可度量化准则,莫尔又对他们提出的可度量化准则进行修改,论述了拓扑空间可度量化的充要条件。<sup>[13]</sup>莫尔的很多文章都会提到前人的一些成果,甚至文章的开头就会写上“某人在某篇文章中提出了某观点”,再针对这个观点进行论述、推导和发展,最终得出自己的结论。

莫尔的文章具有非常浓厚的公理化色彩,体现他极度理性且严谨的学术风格。他指出:

点、线、面、序和全等是欧氏几何的基本概念;点、线和顺序(在一条线上)是画法几何的基础;点、极限点和区域(某些类型)是位置分析的基础。这些学说中的每一个都应该建立在(从)一套关于它的基本概念的假设(公理)之上,这似乎是可取的。欧氏几何和画法几何就是这样发展起来的。<sup>[11]</sup>

在其后的整个学术研究生涯中,莫尔将这种“提出公理——得出定理——对定理进行证明或解释”的风格一直延续多年,并逐渐融入其教学方法之中,形成了独特且影响深远的“莫尔教学法”(Moore Method)。

作为数学家的莫尔相当高产,他一生发表过67篇论文,出版一部专著。在莫尔的整个学术生涯中,成果最多、最集中的,是1920年到1929年这段时间。这十年间,他发表了33篇文章,包括自己发表的学术论文和参加学术会议做的报告等,这几乎占据他全部成果的半数。1929年8月,在科罗拉多州举行的美国数学会夏季会议上,莫尔在完全性条件下给出一种不同于从前公理的命题,这篇演讲影响深远,成为莫尔点集拓扑学研究达到巅峰的重要基石。1931年,莫尔当选美国国家科学院院士,1936年当选美国数学会主席。

1932年,莫尔的第一部点集拓扑学著作——《点集理论基础》问世。<sup>[14]</sup>这本书是其点集拓扑学理论研究的集大成,全书沿用他以往“提出公理——得出定理——对定理进行证明或解释”的风格,构造了一个以点和区域为基本术语的理论体系。全书共七个章节,400



余页，1962年修订再版。

该书第一章共证明183个定理，而这些所有带有编号的命题均建立在公理0和公理1两个公理的基础上。但他并没有使用以往《平面位置分析的基础》一文中的公理1，而是提出了新的内容。这个新公理1是这样表述的：

公理1 存在这样一个序列  $G_1, G_2, G_3, \dots$ ，使得：(1) 对于任意的  $n$ ， $G_n$  是一个覆盖了  $S$  的集合，使得  $G_n$  中的每一个元素都是一个区域；(2) 对于任意的  $n$ ， $G_{n+1}$  是  $G_n$  的子集；(3) 如果  $R$  是一个区域， $X$  和  $Y$  都是  $R$  中的一个点 ( $Y$  可以和  $X$  相同，也可以和  $X$  不同)，则存在一个自然数  $m$ ，使得如果  $g$  是属于  $G_m$  的一个区域，且包含  $X$ ，则  $g$  是  $R$  的一个子集。除非  $Y$  是  $X$ ， $g$  不包含  $Y$ ；(4) 若  $M_1, M_2, M_3, \dots$  是一个闭点集的序列，使得对于每一个  $n$ ，有  $M_n \supset M_{n+1}$ ，且对于每一个  $n$ ，存在集合  $G_n$  的区域  $g_n$ ，使得  $M_n$  是  $\bar{g}_n$  的子集，则对于所有点集  $M_1, M_2, M_3, \dots$  至少存在一个公共点。<sup>[14]</sup>

对于公理1中(1)里提到的  $S$ ，莫尔强调：在本书中，字母  $S$  将被用来表示  $X$  所属的集合，当且仅当  $X$  是一个点。

书中公理0和公理1在一个非常大的、包含许多非局部连通的空间中成立。如果这些公理在空间  $\Sigma$  中成立，且  $S'$  是  $\Sigma$  中的任意内极限集，那么只要合理定义“区域”这个词，这些公理在满足此条件的空间中仍然成立：该空间中的点就是  $S'$  的点。

这条新公理1，在莫尔点集拓扑理论体系中有着举足轻重的地位。莫尔在教学过程中会将它很自然地介绍给自己的学生们，使学生在不知不觉之中将其内化。同《平面位置分析的基础》一文的公理1一样，这条公理后来又结合很多新的公理系统，成为莫尔研究和讲授点集拓扑理论高级课程的基础，并且为他著名的教学方法——莫尔教学法做出重要贡献。

该书第二、三、四章分别被取名为《公理0, 1, 2的结论》《公理0, 1, 2, 3, 4的结论》和《公理0和1-5的结论》，顾名思义，这三章的内容是以公理0, 1, 2, 3, 4, 5为基本理论

证明所得。第四章的公理5是莫尔的得意门生、数学家琼斯 (F. B. Jones) 提出来的。琼斯于1935年博士毕业于德州大学奥斯汀分校，博士论文题目即为“关于罗伯特·李·莫尔的第五条公理”。琼斯将公理5做了推广，得到公理5'。通过莫尔的公理0-5以及公理5'得出13条定理。<sup>[15]</sup> 值得一提的是，这篇博士论文具有与莫尔作品如出一辙的公理化特征。1932年莫尔的书初版时，关于公理5的表述和1962年再版并不相同。琼斯曾指出如将公理5'表示公理5中用紧连续统代替简单闭合曲线得到的公理，那么原公理5则是现在公理0-4和5'的结论，这是该书1962年再版后的一个重大改进。

该书第五章主要研究了上半连续集合的相关理论，提出公理1'、公理C两个公理。第六章莫尔提出一组公理，又将原来的公理5做出变形，得到新的公理5<sub>1</sub>和5<sub>2</sub>，并提出公理6和公理7。第七章做了一些关于拓扑等价与距离的引入工作，但并没有提出新的公理，而是证明了26个相关定理。

关于该书的再版，莫尔在《序言》中说，其所附书目要比1932年版丰富得多，但他认为还远远不够完整。他对该书的参考书目不是很满意。除此之外，书中省略很多重要的内容，比如拓扑群、特殊类型的映射、同伦、轨道理论、周期性等，书中省略或略加处理的部分包括：(1) 维数论；(2) 可称为度量点集理论的某些分支，包括度量理论，特别是在实变量和复变量理论中的应用；(3) 与连续变换及不动点有关的大量命题；(4) 几何基础与拓扑学基础之间的关系（这也是令莫尔感到较为遗憾的地方）；(5) 关于仿紧性相关主题的一组命题。

### 三、莫尔的教育贡献

1965年，美国数学协会制作了一部名为《课堂上的挑战：莫尔方法》的记录片。莫尔借影片旁白之口指出，比起引导式学习，他更愿意自己探索真理。无论是自己的学习和研究过程，还是对学生的指导，他都完完全全地践行了这一观点。

莫尔少年时期自学微积分时,曾尝试凭借自己的努力证明书中定理,他将书中给出的证明方法用纸盖住,自己思考解决问题的方案。如果他苦思仍不得其解,他就拿开那张纸,只露出证明过程的第一行,为自己打开一点思路,再经过独立思考寻求证明。通过这种方法,莫尔打下非常坚实的微积分基础,并开始注重学习公理和证明命题。加上老师E. H. 莫尔对他的影响,莫尔的公理化思想已在脑海中根深蒂固。

莫尔还在芝加哥大学读博时,有时会和老师“比赛”看谁证明得快,如果获胜他便会非常高兴。那时,莫尔就已经产生应该让学生自己探索真理的想法。虽然当时鲜有老师这么做,维布伦甚至觉得莫尔有些异想天开,但E. H. 莫尔十分支持他的想法,希望他能做一个大胆的尝试。

莫尔在宾夕法尼亚大学任教期间,举办“位置分析”讨论班,并且办得相当成熟,后来还把讨论班带到德州大学奥斯汀分校。莫尔会通过自己直接接触或者选修课挑选一些基础薄弱的学生进入讨论班,对那些有拓扑学基础的学生,他会另开一个班供他们学习,显然他希望讨论班的学生们能有相同起点。

莫尔在课堂上很少使用教材或者其他参考资料。首先,他会向学生介绍受到公理限制时某个术语的内涵(比如当说明“区域是点集”时,介绍“点”和“区域”的含义),然后,他会陈述本堂课的核心公理(比如《点集理论基础》中的公理0和公理1),并给出公理的适用情况。再让学生通过这个已知的公理,证明一些较为复杂的定理或命题。如果有学生可以证明,那么莫尔会叫他去黑板上当众展示证明方法。而那些没有得出证明结果的学生,莫尔会反复确认他们是否理解了这种被展示出来的方法。当被展示的证明过程有缺陷时,莫尔会让其他坐在下面的学生对这个答案进行补充或修正。这样一来,所有学生都参与到讨论中。假如偶尔遇到一个难度较大的、所有人都不能修正的缺陷,莫尔会把这个问题搁置起来以后再讨论。有时一个问题会拖很久还找不到头绪,但几乎

所有问题都会在一年之内得到解决。假如某个学生完善了莫尔已发表论文中定理的漏洞,且给出令人信服的理由,那么莫尔会用这个学生的名字来命名这个定理。尽管这种情况并不多见,但这种鼓励的做法对学生的积极影响非常之大。

莫尔强调训练学生的直觉,培养学生的自信,再通过公平而激烈的竞争来驱动学生进步。1932年《点集理论基础》出版后,莫尔常以此书为蓝本训练学生进行证明。为了防止学生私下查阅该书,他永久借阅了学校图书馆里唯一的一本。<sup>[16]</sup>

在回到德州大学任职后的几年里,他把这种讲课方法扩展到所有的课程:微积分、高级微积分、测度论等,以及几何学基础和研究生的拓扑学课程。从其博士毕业生的研究产出来看,莫尔教学法确实成绩斐然。在教学过程中,莫尔将自己的学习和研究经验传授给学生,莫尔教学法中到处可以窥见他的公理化思想。

莫尔一生培养了50名博士,其中35人是在1940年以后带的,这段时间也被称为莫尔“发掘人才的黄金期”。1953年以后,莫尔便不再发表学术论文,而是专心培养后辈人才。实际上,莫尔这个时期的目标是培养数学家,他培养的博士中有很多人,比如克莱因(J. R. Kline)、怀尔德(R. L. Wilder)、宾(R. H. Bing)等都成为知名的数学家。

莫尔教学法后来被他的学生广泛应用到自己的工作中。琼斯曾谈及自己对莫尔教学法的改进:

对于一些胆小得不敢在班级组会上展示自己论证想法的学生……对于那些没有积极参与的人来说,这门课程俨然一门讲座课程……到目前为止,这种方法最大的困难就是耐心。教师不能帮忙,不能指出一些“显然成立”的事情。我们也都知道,即使是显而易见的事,捅破那层窗户纸简直难如登天!导师必须愿意静待学生从内心发生意想不到的变化……教师应该抑制自己扶着学生走路的冲动,哪怕是学生的一个幼稚的想法,教师也应该为此而高兴。只有在少数情况下,

教师该向学生展示自己的“完美答案”。学生可以从课后的阅读中学到“完美”。<sup>[17]</sup>

与莫尔相比，琼斯更有耐心，更加尊重学生的自主性，更加注重培养学生的研究能力甚于传授知识，他希望学生能通过正确的研究手段来自己获取知识。事实上，莫尔曾经用自己的“完美答案”否定过琼斯的“幼稚想法”，年轻的琼斯对此颇有微词。但琼斯同时也承认措辞和思路清晰性的重要性，任何上过莫尔课的人都能很快发现，力求清晰地口头陈述和书面表达是莫尔教学法不可或缺的一部分，琼斯只是鼓励学生自己能够培养这种清晰性。琼斯和莫尔一样，给予学生足够的信心，相信他们可以做出“完美的答案”。通过这样的方法，他可以令一个完全零基础的学生，在六个月内面对导师提出的问题对答如流。在琼斯等人的推动下，莫尔的公理化教学法风靡一时，在美国的中小学也被广泛应用。

#### 四、莫尔与德州拓扑学派

莫尔在学术上取得成功不是偶然的，是他天赋异禀和多年学术积淀共同作用的结果。20世纪30年代初，莫尔的点集拓扑学研究已经达到很高水平，他也拥有一批忠实的拥护者。他与追随他的学生们、同事们，后来被称为“德州拓扑学派”，亦称“莫尔学派”。在美国拓扑学研究史上留下浓墨重彩的一笔，和波兰学派等拓扑学研究群体交相辉映，影响深远。在学派形成初期，数学家们大多通过莫尔教学法凝聚在一起，又因为研究主阵地是在德州大学，学派因此得名。但必须指出的是，“学派成员”的身份与“是否是莫尔弟子或再传弟子”并非充要条件关系，学派的人员也具有相当大的流动性（如图1）。<sup>[18]</sup>

莫尔的前三个博士生是在宾夕法尼亚大学带的克莱因、哈里特（G. H. Hallett）、穆丽金（A. Mullikin）。三人中只有克莱因毕业后从事数学研究工作，一直在宾夕法尼亚大学任教，始终

与莫尔有密切联系，后来做过美国数学会秘书。



图1 20世纪20年代以莫尔为核心的德州大学拓扑学派

莫尔曾说过：“在德州大学我所有获得博士学位的学生中，怀尔德博士是最出色的一个。”<sup>[19]</sup>怀尔德是莫尔在德州大学的第一个博士，曾担任过美国数学会和美国数学协会的主席。他不仅是一位数学家，也是数学文化研究的先驱者。在数学上，怀尔德发展了莫尔的点集拓扑理论，且并不拘泥于点集拓扑，而是意识到代数拓扑的重要性，他在点集拓扑、代数拓扑、流形理论等领域都做出不朽业绩。在数学文化领域，他研究数学概念的进化和数学教育、数学史等问题，是第一位将文化人类学应用于数学历史进化研究的数学家。<sup>[20]</sup>他还将后来非常著名的数学家斯廷罗德（N. E. Steenrod）送往哈佛大学和普林斯顿学习代数拓扑，斯廷罗德的黄金搭档、来自波兰学派的后学艾伦伯格（S. Eilenberg）也曾在此到美国之时受到怀尔德帮助，后来二人合作完成了同调论的公理化。<sup>[21]</sup>

莫尔的学生怀布恩（G. T. Whyburn）于1953年当选为美国国家科学院院士，怀尔德1963年当选为院士、宾1965年也当选为院士。除此之外，莫尔有两位学生担任过美国数学会主席、四位学生担任过美国数学协会主席，可谓群星璀璨。莫尔的再传弟子<sup>①</sup>，则有惊人的4317人（截止至2021年11月17日）。

德州拓扑学派除了莫尔的学生外，成员还

①莫尔的弟子及再传弟子，详见数学家宗谱网站 <https://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=286>



包括其同事。和莫尔关系最亲密的两位,一个是艾特林格(H. J. Ettlinger),一个是瓦尔(H. S. Wall)。他们彼此分享学生,实现学术成果互补,这也是德州拓扑学派取得辉煌成就的重要原因。从这个角度看,将学派命名为“德州拓扑学派”,比“莫尔学派”更为恰当。

与其同时代的波兰数学学派,主攻集合论、拓扑学等领域,以华沙大学为主阵地,因此也称为“华沙学派”。谢尔宾斯基(W. Sierpiński)、马祖尔克维奇(S. Mazurkiewicz)、博苏克(K. Borsuk)等都是波兰学派的成员。1920年,波兰学派的期刊《基础数学》(*Fundamenta Mathematicae*)正式创刊,当它在美国发行第一期的时候,德州拓扑学派就已开始注意到波兰学派数学家的研究成果。

1923年,莫尔在《基础数学》上发表了一篇文章,从那开始,德州拓扑学派和波兰学派开始了有趣的竞争与合作。在莫尔档案记载中,保存着莫尔同波兰学派一名成员的书信草稿,信中莫尔感谢谢尔宾斯基出版了《基础数学》的第七卷。1926年、1930年,德州拓扑学派的克莱因、怀布恩访问了波兰学派。

怀尔德曾指出:“如果有人能列出谁在二十世纪上半叶美国数学发展史上最具影响力,罗伯特·李·莫尔一定在其中声名显赫。”<sup>[22]</sup>作为数学家,莫尔的成就是人们有目共睹的,他对数学的贡献早已不仅仅局限于“纯数学”本身。他的许多学生接过了他的接力棒,继续研究这些问题。他的学生女数学家鲁丁(M. E. Rudin)与学生们一起,将一般拓扑学带入了“鲁丁时代”。

## 结 语

莫尔是20世纪上半叶拓扑学基础构建时期,美国、波兰、俄国等地众多优秀数学家中的一个。德州拓扑学派的后学们在自己的道路上,不可避免地吸收新的思想和理论,并开始新的研究方向。其中有些是莫尔所不认可的,但是这也并不能否认莫尔早期对他们的启蒙和激励作用。

而从现代拓扑学的眼光来看,莫尔的研究范围还是比较窄的,他仅在“点集拓扑”方面感兴趣,甚至在教条主义和陈旧偏见的影响下,他对一般拓扑学和代数拓扑学始终选择视而不见,终身未曾涉足。莫尔在学术上保持着严谨、自信甚至有些固执的态度。他虽然是一个公理基础必要性的传道者,却显然秉承着以某种绝对直觉为个人数学思想和信念。怀尔德在回忆自己的恩师时便说,莫尔的公理一旦被公布,那就不可篡改。对他来说,这不是方便问题,而是真理问题。谁如果当着他面质疑他的公理,那一定会激起他的愤怒。<sup>[23]</sup>

他的研究虽然仅涉猎他所认为的“点集理论”,却包含代数拓扑学和一般拓扑学的思想萌芽。比如在1924年的《关于不可分给定连续统的上半连续集》一文中,莫尔首次谈到商拓扑,1925年又首次提到商空间。1940年,数学家们才在代数拓扑中正式系统地定义并论述商空间。<sup>[24]</sup>

1973年,德州大学奥斯汀分校新建成的17层物理和数学大楼以莫尔的名字命名,这是德州大学校方和学术界对莫尔一生成就的巨大认可。大楼落成典礼上有六位数学家致辞,他们全部都是莫尔的再传弟子。尽管成就如此之大,莫尔却坚持认为自己是站在巨人的肩膀上。

总之,莫尔是一位富有热情、又非常刻苦的数学家和数学教师。莫尔身上所体现出来的优秀数学家品质和莫尔教学法所展现出来的创造性精神,是非常值得数学研究者、教育工作者学习的。正如哈里特在采访中评价的:

莫尔博士的教学方法引出了数学研究中最重要两种能力——一种是惊世骇俗的想象力,另一种是将逻辑应用到你想要尝试的东西上的批判性分析能力。当然,这也同样适用于其他事物。<sup>[25]</sup>

## [参 考 文 献]

- [1] Schuyler, E., Gross, J. A. V., Moore, R. L., et al. 'Solutions of Problems: Algebra: 123'[J]. *The American Mathematical Monthly*, 1901, 8(10): 196.
- [2] Parker, J. R. L. *Moore: Mathematician and Teacher*[M].

- Washington: Mathematical Association of America, 2005, 36–38.
- [3] Armentrout, S. 'Robert Lee Moore' [EB/OL]. [https://celebratio.org/Moore\\_RL/article/104/](https://celebratio.org/Moore_RL/article/104/). 2021–11–10.
- [4] Moore, R. L. 'Sets of Metrical Hypotheses for Geometry' [J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1908, 9(4): 487–512.
- [5] Moore, R. L. 'On a Set of Postulates Which Suffice to Define a Number-plane' [J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1915, 16(1): 27–32.
- [6] Moore, R. L. 'On the Lie-Riemann-Helmholtz-Hilbert Problem of the Foundations of Geometry' [J]. *American Journal of Mathematics*, 1919, 41(4): 299–319.
- [7] Moore, R. L. 'Book Review: Projective Geometry' [J]. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1920, 26(9): 412–425.
- [8] Moore, R. L. 'On Duhamel's Theorem' [J]. *Annals of Mathematics*, 1912, 13(2): 161–166.
- [9] Moore, R. L. 'The Linear Continuum in Terms of Point and Limit' [J]. *Annals of Mathematics*, 1914–1915, 16(1–4): 123–133.
- [10] Moore, R. L. 'On the Linear Continuum' [J]. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1915, 22(3): 117–122.
- [11] Moore, R. L. 'On the Foundations of Plane Analysis Situs' [J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1916, 17(2): 131–164.
- [12] Moore, R. L. 'On the Foundations of Plane Analysis situs' [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1916, 2(5): 270–272.
- [13] 王昌. 点集拓扑学的创立 [D]. 西安: 西北大学, 2012.
- [14] Moore, R. L. *Foundations of Point Set Theory* [M]. Providence, Rhode Island: American Mathematica Society, 1962, 1–100.
- [15] Jones, F. B. 'Concerning R. L. Moore's Axiom 5' [J]. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1938, 44(11): 689–692.
- [16] Zitarelli, D. E. 'The Origin and Early Impact of the Moore Method' [J]. *The American Mathematical Monthly*, 2004, 111(6): 465–486.
- [17] Jones, F. B. 'The Moore Method' [J]. *The American Mathematical Monthly*, 1977, 84(4): 273–278.
- [18] Lewis, A. C. 'The Beginnings of the R. L. Moore School of Topology' [J]. *Historia Mathematica*, 2004, 31(3): 279–295.
- [19] Whyburn, L. 'R. L. Moore's First Doctoral Student at Texas' [A], Millett, K. C. (Ed.) *Algebraic and Geometric Topology* [C], Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1978, 33–37.
- [20] 刘鹏飞、徐乃楠、王涛. 怀尔德的数学文化研究 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2021, 138.
- [21] 张勇、邓明立. 塞缪尔·艾伦伯格: 从华沙走向世界的数学家 [J]. 自然辩证法通讯, 2018, 40 (3): 128–138.
- [22] Wilder, R. L. 'Robert Lee Moore, 1882–1974' [J]. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1976, 82(3): 417–427.
- [23] Wilder, R. L. 'The Mathematical Work of R. L. Moore: Its Background, Nature and Influence' [J]. *Archive for History of Exact Sciences*, 1982, 26(1): 73–97.
- [24] 干丹岩. 代数拓扑与微分拓扑简史 [M]. 湖南: 湖南教育出版社, 2005, 87.
- [25] Traylor, D. R. *Creative Teaching: Heritage of R. L. Moore* [M]. Houston: University of Houston, 1972, 79.

[责任编辑 王大明 柯遵科]